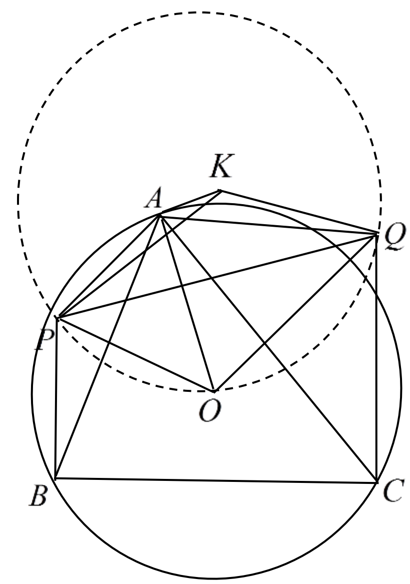
I-II ტური

1. ვთქვათ O წერტილი არის ABC მახვილკუთხა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი. B წერტილზე გავლებულია BC მონაკვეთის მართობული წრფე, რომელიც AB მონაკვეთის შუამართობს კვეთს P წერტილში. C წერტილზე გავლებულია BC მონაკვეთის მართობული წრფე, რომელიც AC მონაკვეთის შუამართობს კვეთს Q წერტილში. K არის OPQ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი. დაამტკიცეთ, რომ $\angle KAO = 90^\circ$.

ამოხსნა



ვთქვათ, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. მაშინ
$\angle PAB = \angle PBA = 90^\circ - \beta$, $\angle OAB = 90^\circ - \angle AOP = 90^\circ - \gamma$,
$\angle OAC = 90^\circ - \angle AOQ = 90^\circ - \beta$, $\angle QAC = \angle QCA = 90^\circ - \gamma$.
ამიტომ $\angle PAQ = \angle PAB + \angle BAO + \angle OAC + \angle CAQ =$
$= (90^\circ - \beta) + (90^\circ - \gamma) + (90^\circ - \beta) + (90^\circ - \gamma) = 360^\circ - 2\beta - 2\gamma = 2\alpha$
$\angle PKQ = 360^\circ - 2\angle POQ = 360^\circ - 2(\beta + \gamma) = 2\alpha$. ამრიგად $PAKQ$ ოთხკუთხედი არის ციკლური, საიდანაც ვიღებთ,
რომ $\angle KAQ = \angle KPQ = \dfrac{1}{2}(180^\circ - \angle PKQ) = 90^\circ - \alpha$.
ამიტომ $\angle KAO = \angle KAQ + \angle QAC + \angle CAO =$
$= 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \gamma + 90^\circ - \beta = 90^\circ$ რ.დ.გ.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ $\angle PAB = 90^\circ - \beta$;

ბ) დაადგინა, რომ $\angle OAB = 90^\circ - \gamma$;

გ) დაადგინა, რომ $\angle PAQ = 2\alpha$;

დ) დაადგინა, რომ $\angle PKQ = 2\alpha$;

ე) დაადგინა, რომ $PAKQ$ ოთხკუთხედი არის ციკლური;

ვ) დაადგინა, რომ $\angle KAQ = 90^\circ - \alpha$

ზ) დაადგინა, რომ $\angle KAO = 90^\circ$.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა) ან ბ)

2 ქ- ა), ბ)

3ქ- ა) , ბ), გ)   ან ა), ბ) , დ)

4ქ- ა), ბ), გ), დ)

5ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)

6 ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

2. ყოველი რიცხვი $\{1,2, \dots ,2016\}$ სიმრავლიდან შეღებილია ან წითლად ან ლურჯად. ამასთან, 1008 ცალი რიცხვი შეღებილია წითლად, ხოლო დანარჩენი 1008 ცალი ლურჯად. ვთქვათ, k არის რაოდენობა ისეთი მთელი რიცხვების, რომელთა წარმოდგენაც შესაძლებელია ერთი ცალი წითელი და ერთი ცალი ლურჯი რიცხვის ჯამის სახით (არა აუცილებლად ერთადერთი გზით). იპოვეთ k-ს მაქსიმალური შესაძლო მნიშვნელობა.

ამოხსნა

ვთქვათ $n = 2016$. დავამტკიცოთ, რომ k -ს მაქსიმალური შესაძლო მნიშვნელობა არის $2n - 5$. უმცირესი რიცხვი რომლის წარმოდგენაც შეიძლება წითელი და ლურჯი რიცხვების ჯამად არის $3 = 1 + 2$, ხოლო უდიდიესი $2n - 1 = (n - 1) + n$. ამრიგად სულ არის არაუმეტეს $2n - 3$ რიცხვისა, რომელთა წარმოდგენაც შესაძლებელია წითელი-ლურჯი რიცვების ჯამად. ვაჩვენოთ, რომ შეუძლებელია ისეთი შეღებვა, რომლის დროსაც $2n - 3$ ან $2n - 4$ ცალი რიცხვი იქნება წითელი-ლურჯი რიცხვების ჯამი. დავუშვათ არსებობს შეღებვა A, რომლის დროსაც $2n - 3$ ან $2n - 4$ ცალი რიცხვი არის წითელი-ლურჯი რიცხვების ჯამი. მაშინ ან ყველა რიცხვი $\{4,5, \dots ,2n - 1\}$ სიმრავლიდან წითელი-ლურჯი რიცხვების ჯამია, ან არსებობს მხოლოდ ერთი რიცხვი $\{4,5, \dots ,2n - 1\}$ სიმრავლიდან, რომელიც არ წარმოდგება წითელი-ლურჯი რიცხვების ჯამის სახით. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ეს რიცხვი მეტია n-ზე. მართლაც, განვიხილოთ მეორე შეღებვა B, რომლის დროსაც i რიცხვი არის ლურჯი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $n + 1 - i$ არის ლურჯი A შეღებვისას. მაშინ B შეღებვისას m რიცხვი წარმოდგება წითელი-ლურჯი რიცხვების ჯამად, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A შეღებვის დროს $2n + 2 - m$ წარმოდგება წითელი-ლურჯი რიცხვების ჯამად. ამრიგად, თუ A შეღებვისას $n + 1$-ზე ნაკლები რიცხვი არ წარმოდგებოდა როგორც ჯამი წითელი-ლურჯი რიცხვებისა, მაშინ B შეღებვის დროს $2n + 2 - (n + 1) = n + 1$ რიცხვზე მეტი არ წარმოდგება წითელი-ლურჯი რიცხვების ჯამად. ე.ი. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ყველა რიცხვი $\{3,4, \dots , n\}$ სიმრავლიდან წარმოდგება წითელი-ლურჯი რიცხვების ჯამად. ასევე ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ 1 არის ლურჯი. რადგანაც 3 წარმოდგენადია წითელი-ლურჯი რიცხვების ჯამად და 1 ლურჯია, ამიტომ 2-იანი აუცილებლად უნდა იყოს წითელი. ვთქვათ ახლა $2, \dots , l$ რიცხვები წითელია, სადაც $2 \leq l \leq n - 2$. ვინაიდან $l + 2 \leq n$-ზე, ამიტომ ის წარმოდგენადია წითელი-ლურჯი რიცხვების ჯამად. ანუ $l + 2 = a + b$, სადაც a ლურჯია და b წითელი. ეს კი შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ თუ ერთ-ერთი ამ რიცხვთაგან 1-ია. (ცხადია, რომ თუ $l + 2 = a + b$, სადაც $a, b \geq 2$, მაშინ ასევე მართებულია უტოლობები $a, b \leq l$, რაც თავის მხრივ ნიშნავს, რომ a და b ორივე წითელია). ამრიგად ვღებულობთ, რომ $l + 2 = 1 + (l + 1)$ და რადგანაც 1 ლურჯია, ამიტომ $l + 1$ წითელია. ინდუქციის გამოყენებით მივიღებთ, რომ ყველა რიცხვი 2 -დან $n - 1$-ის ჩათვლით უნდა იყოს წითელი, რაც ცხადია წინააღმდეგობაა (სულ გვაქვს $n/2$

წითელი რიცხვი). ამრიგად მივიღეთ, რომ $\{3,4, \dots ,2n-1\}$ სიმრავლიდან სულ მცირე ორი რიცხვი არ წარმოდგება წითელი-ლურჯი რიცხვების ჯამად, ანუ $k \leq 2n-5$. ახლა განვიხილოთ $\{1,2, \dots , n\}$ სიმრავლის შემდეგი შეღებვა: შევღებოთ ლურჯად რიცხვი 1 და ყველა ლუწი რიცხვი n-ის გარდა, ხოლო დანარჩენი რიცხვები შევღებოთ წითლად, ანუ 1-ის გარდა ყველა კენტი რიცხვი და რიცხვი n შევღებოთ წითლად. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ასეთი შეღებვის დროს ყველა რიცხვი $\{4,5, \dots ,2n-2\}$ სიმრვლიდან, ანუ სულ $2n-5$ ცალი რიცხვი, არის წითელი-ლურჯი რიცვების ჯამი. ე. ი. $k=2n-5=4027$.

პასუხი: $k=4027$

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ არ შეიძლება k ტოლი იყოს $2n-3$ -ის;
ბ) შენიშნა, რომ თუ $k=2n-4$, მაშინ რიცხვი რომელიც არ წარმოდგება წითელი-ლურჯი რიცხვების ჯამად, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ მეტი n-ზე;
გ) დაადგინა, რომ არ შეიძლება k ტოლი იყოს $2n-4$ -ის;
დ) მოიყვანა მაგალითი შეღებვისა სადაც რეალიზდება ტოლობა $k=2n-5$;

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ)
4ქ- ა) , ბ), გ)
7ქ- ა) , ბ), გ), დ)

3. ვთქვათ მოცემულია $a_1, a_2, a_3, \ldots$ მიმდევრობა, რომლის თითოეული a_k წევრი არის დადებითი ნამდვილი რიცხვი და ყოველი მთელი დადებითი k რიცხვისთვის სრულდება უტოლობა:

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + k - 1}.$$

დაამტკიცეთ, რომ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \geq n$ ყოველი $n \geq 2$ მთელი დადებითი რიცხვისთვის.

ამოხსნა

ამოცანის პირობაში მოცემული უტოლობიდან გვექნება:

$$\frac{k}{a_{k+1}} \leq \frac{a_k^2 + k - 1}{a_k} = a_k + \frac{k-1}{a_k} \Rightarrow a_k \geq \frac{k}{a_{k+1}} - \frac{k-1}{a_k}.$$

ჩავწეროთ მიღებული უტოლობა $k = 1, 2, \ldots, m$ მნიშვნელობებისათვის და შევკრიბოთ. გვექნება:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m \geq \left(\frac{1}{a_2} - \frac{0}{a_1}\right) + \left(\frac{2}{a_3} - \frac{1}{a_2}\right) + \ldots + \left(\frac{m}{a_{m+1}} - \frac{m-1}{a_m}\right) = \frac{m}{a_{m+1}}. \quad (1)$$

ახლა დამტკიცება ჩავატაროთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით n–ის მიმართ. თუ ამოცანის პირობაში მოცემულ უტოლობაში ჩავსვამთ $k = 1$, მივიღებთ $a_2 \geq \frac{1}{a_1}$. ამიტომ $a_1 + a_2 \geq a_1 + \frac{1}{a_1} \geq 2$. ამრიგად, $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \geq n$ სამართლიანია $n = 2$ შემთხვევაში.

ახლა დავუშვათ, რომ დასამტკიცებელი უტოლობა სამართლიანია რაიმე $n \geq 2$ შემთხვევაში. თუ $a_{n+1} \geq 1$, მაშინ $(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) + a_{n+1} \geq n + 1$ და დამტკიცება დასრულებულია. თუ $a_{n+1} < 1$, მაშინ (1) შეფასების გამოყენებით გვექნება

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) + a_{n+1} \geq \frac{n}{a_{n+1}} + a_{n+1} = \frac{n-1}{a_{n+1}} + \left(\frac{1}{a_{n+1}} + a_{n+1}\right) \geq n - 1 + 2 = n + 1.$$

დამტკიცება დასრულებულია.

ამოხსნის ეტაპები

ა) მიიღო $\frac{k}{a_{k+1}} \leq a_k + \frac{k-1}{a_k}$;

ბ) მიიღო $a_k \geq \frac{k}{a_{k+1}} - \frac{k-1}{a_k}$;

გ) მიიღო $a_1 + a_2 + ... + a_m \ge \frac{m}{a_{m+1}}$;

დ) გამოიყენა ინდუქციის მეთოდი დაამტკიცა $n = 2$ შემთხვევა;

ე) განიხილა $a_{n+1} \ge 1$ შემთხვევა და დაასრულა დამტკიცება;

ვ) განიხილა $a_{n+1} < 1$ შემთხვევა და მიიღო $(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) + a_{n+1} \ge \frac{n}{a_{n+1}} + a_{n+1}$;

ზ) $a_{n+1} < 1$ შემთხვევაში მიიღო $(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) + a_{n+1} \ge n + 1$ და დაასრულა დამტკიცება.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)

2 ქ- ა), ბ)

3ქ- ა) , ბ), გ)

4ქ- ა), ბ), გ), დ)

5ქ- ა), ბ), გ), დ), ე) ან ა), ბ), გ), დ), ვ)

6 ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ) ან ა), ბ), გ), დ), ვ), ზ)

7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

4. ცნობილია, რომ $P(x) = x^{2016} + 2016x^{2015} + a_{2014}x^{2014} + a_{2013}x^{2013} + \cdots + a_1x + 1$ პოლინომის წარმოდგენა შესაძლებელია $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{2016})$ სახით, სადაც $x_1, x_2, \dots, x_{2016}$ რიცხვებიდან 2015 ცალი მაინც უარყოფითია (არაა აუცილებელი, რომ ეს რიცხვები ერთმანეთისაგან განსხვავებული იყოს). იპოვეთ $P(1)$.

ამოხსნა

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $x_1, x_2, \dots, x_{2015}$ ამოცანის პირობაში მოცემული უარყოფითი ფესვებია. ცხადია გვაქვს შემდეგი ტოლობები, $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2015} + x_{2016} = -2016$ და $x_1 x_2 \dots x_{2015} x_{2016} = 1$. ბოლო ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ x_{2016} -იც უარყოფითი რიცხვია, საიდანაც ვღებულობთ ტოლობას $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_{2015}| + |x_{2016}| = 2016$. თუ გამოვიყენებთ უტოლობას საშუალო არითმეტიკულისა და საშუალო გეომეტრიულის შესახებ, გვექნება

$$1 = \frac{|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_{2015}| + |x_{2016}|}{2016} \geq \sqrt[2016]{|x_1| \cdot |x_2| \cdot \ldots \cdot |x_{2015}| \cdot |x_{2016}|} = 1.$$

ამრიგად ვღებულობთ, რომ $|x_1| = |x_2| = \cdots = |x_{2015}| = |x_{2016}| = 1$, ანუ $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2015} = x_{2016} = -1$, ე.ი. $P(x) = (x+1)^{2016}$ და ამიტომ $P(1) = 2^{2016}$.

პასუხი: 2^{2016}

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ დარჩენილი ფესვიც უარყოფითია;

ბ) განიხილა ვეიტას თეორემა და გადაწერა ის ფესვების მოდულებისთვის;

გ) გამოიყენა უტოლობა საშუალო არითმეტიკულისა და საშუალო გეომეტრიულის შესახებ;

დ) დაადგინა რომ ყველა ფესვი ერთმანეთის ტოლია;

ე) მიიღო პასუხი.

შეფასების სქემა

1ქ – ა)

2ქ –ა), ბ)

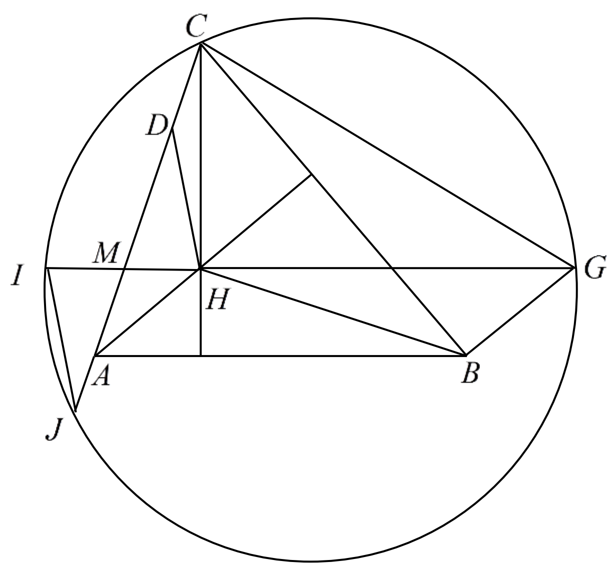
4ქ –ა), ბ), გ)

6ქ –ა), ბ), გ), დ)

7ქ –ა), ბ), გ), დ), ე)

5. ვთქვათ ABC არის მახვილკუთხა სამკუთხედი, რომლის სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილი არის H . G წერტილი ისეა აღებული, რომ $ABGH$ ოთხკუთხედი არის პარალელოგრამი. I წერტილი მდებარეობს GH წრფეზე ისე, რომ AC წრფე შუაზე ყოფს HI მონაკვეთს. AC წრფე GCI სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირს კვეთს C და J წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ $IJ = AH$.

ამოხსნა



ვინაიდან $HG \parallel AB$ და $BG \parallel AH$, ამიტომ შესაბამისად გვაქვს $CH \perp GH$ და $BG \perp BC$. მაშინ გვექნება, რომ $BGCH$ ოთხკუთხედი არის ციკლური. $\angle HAC = 90^\circ - \angle ACB = \angle CBH$. $CGJI$ ოთხკუთხედიც არის ციკლური, ამიტომ გვექნება $\angle CJI = \angle CGH = \angle CBH = \angle HAC$. AC წრფეზე ავიღოთ D წერტილი ისე, რომ $AH = HD$. მაშინ $\angle MJI = \angle CJI = \angle HAC = \angle MDH$. ვინაიდან $\angle MJI = \angle MDH$, $\angle IMJ = \angle HMD$ და $IM = MH$, ამიტომ $\Delta IMJ = \Delta HMD$, საიდანაც $IJ = HD = AH$. რ.დ.გ.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ $BGCH$ ოთხკუთხედი არის ციკლური;

ბ) დაადგინა, რომ $\angle HAC = \angle CBH$;

გ) დაადგინა, რომ $\angle CJI = \angle HAC$;

დ) AC წრფეზე აიღო D წერტილი ისე, რომ $AH = HD$;

ე) დაადგინა, რომ $\angle MJI = \angle MDH$;

ვ) დაადგინა, რომ $\Delta IMJ = \Delta HMD$;

ზ) დაადგინა, რომ $IJ = AH$.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა) ან ბ)

2 ქ- ა), ბ)

3ქ- ა) , ბ), გ)

4ქ- ა), ბ), გ), დ)

5ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)

6 ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

6. იპოვეთ n რიცხვის ყველა მთელი დადებითი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც 10^n უნაშთოდ იყოფა n^3+n^2+n+1 -ზე .

ამოხსნა

გვაქვს $n^3+n^2+n+1=(n+1)(n^2+1)$. თუ სრულდება ამოცანის პირობა, მაშინ $(n+1)$-ს და (n^2+1)-ს არ აქვთ მარტივი გამყოფი გარდა შესაძლოა 2-ისა და 5-ისა. ვინაიდან $(n^2+1)-(n+1)(n-1)=2$, ამიტომ (n^2+1)-ისა და $(n+1)$-ის უდიდესი საერთო გამყოფი (უსგ), ან 1-ია ან 2. თუ n ლუწია მაშინ $n+1$ და n^2+1 რიცხვები ორივე კენტია, ანუ ორივე 5-ის ჯერადია. ეს კი ეწინააღმდეგება იმას, რომ $უსგ(n+1, n^2+1)=1$ ან 2-ს. ამრიგად, n კენტია ე.ი. $n+1$ და n^2+1 ლუწია. რადგან $n^2+1\equiv 2(mod4)$, ამიტომ ის არ იყოფა 4 -ზე.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

1) n^2+1 არ იყოფა 5-ზე: მაშინ n^2+1 არის 2 -ის ხარისხი და რადგანაც ის არ იყოფა 4 -ზე, ამიტომ $n^2+1=2$. საიდანაც ვღებულობთ $n=1$ და შემოწმებით ვრწმუნდებით, რომ ამ შემთხვევაში ამოცანის პირობა არ კმაყოფილდება.
2) n^2+1 იყოფა 5-ზე: ვინაიდან $n>1$ -ზე და n^2+1 არ იყოფა 4 , გვაქვს წარმოდგენა $n+1=2^k$ და $n^2+1=2\cdot 5^l$, სადაც k და l, მთელი დადებითი რიცხვებია და $k\geq 2$. თუ $k=2$ მაშინ $n=3$ და ადვილი შესამოწმებელია, რომ ვღებულობთ ამოცანის ერთ ამონახსნს. ვთქვათ ახლა $k\geq 3$. გვაქვს $2\cdot 5^l=\left(2^k-1\right)^2+1$, რაც იგივეა $5^l-1=2^k(2^{k-1}-1)$. ამრიგად 5^l-1 არის 8-ის ჯერადი. თუ l ლუწია, მაშინ $5^l\equiv 1(mod8)$, ხოლო თუ l კენტია მაშინ $5^l\equiv 5(mod8)$. ამიტომ l უნდა იყოს ლუწი, ე. ი. $l=2m$ სადაც m დადებითი მთელია და გვაქვს $(5^m-1)(5^m+1)=2^k(2^{k-1}-1)$. ვინაიდან $5^m+1\equiv 2(mod4)$, ამიტომ $5^m-1=2^{k-1}a$, სადაც a დადებითი კენტი რიცხვია. $2^{k-1}a(2^{k-1}a+2)=2^k(2^{k-1}-1)$ ტოლობიდან ვღებულობთ $a\left(2^{k-2}a+1\right)=2^{k-1}-1$. შევნიშნოთ, რომ თუ $a\geq 3$ მივიღებთ წინააღმდეგობას $a\left(2^{k-2}a+1\right)>2^k>2^{k-1}-1$. ამრიგად $a=1$ და ამ შემთხვევაში $2^{k-1}(2^{k-1}+2)=2^k(2^{k-1}-1)$ ტოლობიდან ვღებულობთ $2^{k-1}=4$, ანუ $k=3$ და შესაბამისად $n=7$. შემოწმების შედეგად ვრწმუნდებით, რომ ის ამოცანის მეორე ამონახსნია.

პასუხი: 3 და 7

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაშალა $n^3+n^2+n+1=(n+1)(n^2+1)$ და შენიშნა, რომ $უსგ(n+1, n^2+1)=1$ ან 2-ს;
ბ) დაადგინა, რომ n კენტია;
გ) განიხილა შემთხვევა, როცა (n^2+1) არ იყოფა 5-ზე და აჩვენა, რომ ამ შემთხვევაში ამოცანას ამონახსნი არ აქვს;

დ) ჩაწერა $n+1=2^k$ ტოლობა და როცა $k=2$ მიიღო ერთი ამონახსნი, $n=3$;
ე) განიხილა $k \geq 3$ შემთხვევა და დაადგინა, რომ n^2+1 იყოფა 5^l -ზე, სადაც l ლუწია;
ვ) მიიღო $5^m-1=2^{k-1}a$ ტიპის ტოლობა, სადაც a კენტია და აჩვენა რომ $a<3$;
ზ) განიხილა შემთხვევა, როცა $a=1$ და მიიღო მეორე ამონახსნი.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ)
3ქ- ა) , ბ), გ)
4ქ- ა), ბ), გ), დ)
5ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)