შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 57-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

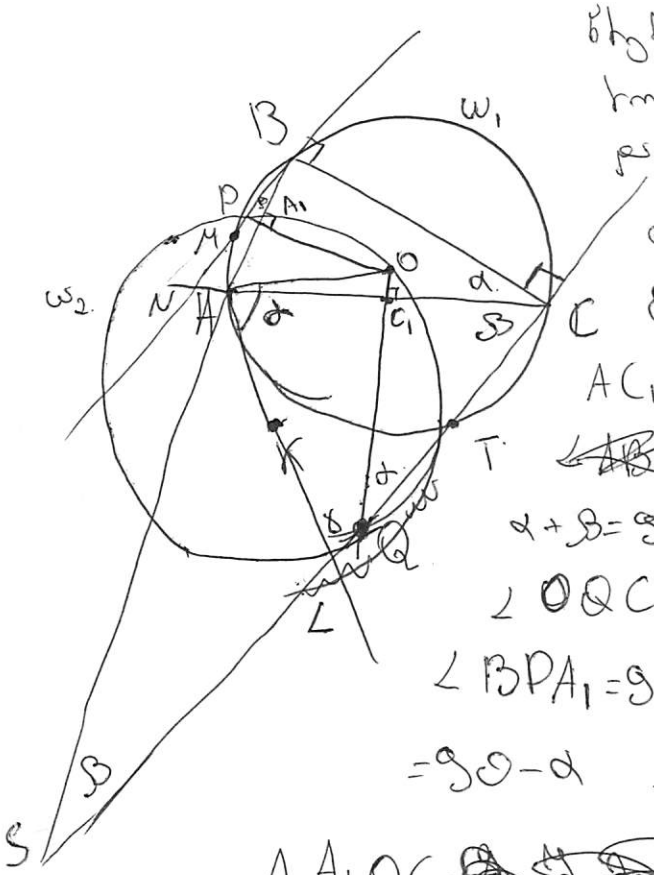
მაგიდა № 11

17.04.2016/ მათ/I/ 438

ამოცანა № 1

გვერდი № 2

გ.ფ. - $\angle OAK = 90^\circ$.



M წერტილი იყოს BP სხივის ω_1 წრეწირის, მაგრამ შევვიძლია ვთქვათ, რომ M; O; C ერთ წრეზეა და სხვა ω_1-ის დიამეტრზე. T იყოს ω_1-წრეწირის გადაკვეთის წერტილი. QC-ს ეკუთვნის. T; O და B ერთ წრეზეა.

$AC_1 = C_1C$ და $AA_1 = A_1B$ $\angle AC_1B = \alpha$.

~~$\angle ABC = 90^\circ$~~ ~~$\angle NBA = \alpha$~~ $\angle ACS = \beta$.

$\alpha + \beta = 90$ * $\angle NBA = \beta = \angle BSC$

$\angle OQC = \alpha$.

$\angle BPA_1 = 90 - \beta$ $\angle NPA_1 = 90 + \beta$ $\angle MNA =$

$= 90 - \alpha$ $\angle NAA_1 = 90 + \alpha - \beta$

AA_1OC_1 ~~[illegible]~~ ციკლია.

$\angle ALQ = \gamma \Rightarrow \angle BAL = 180 - \gamma$

$\angle BAC = 90 - \alpha + \beta$ $180 - \gamma = \angle KAC + \angle BAC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KAC = 90 - \gamma + \alpha - \beta$

$\angle SAK = \gamma - \beta$

$\cancel{\gamma} - \cancel{\beta} + 90 - \cancel{\gamma} + \alpha - \cancel{\beta} = 180 - 2\cancel{\beta}$. $\alpha = 90$ სკგ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 57-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 11	17.04.2016/ მათ/I/ 438

ამოცანა № 2 | გვერდი № 1

შეუშვიშვილი, რომ 3-ანი და 2-ანი ვერ წარმოგვიქმნია. ასევე დავამტკიცოთ, რომ ვერავინ 4-ანიც. 4-ანი წარმოგვიქმნა 4=1+3 ე.ი. 1-ანი და სამიანი ერთვალია ერთის ყუთში ექნებოდა. 1 2 3 4 5 6 7... დაუშვა სამიანის წარმოქმნა შესაძლებელია. გამოვა, რომ 2-ანი ბიჯია (დაუშვა 3-ანი იყოს 3-ანი ბიჯიან მაშინ გამოვა, რომ 5=2+3=1+4 2+3ის გვაწყობს ე.ი. 4-ანიც ბიჯია. ეს რომ გავაკეთეთ შევიტყეთ, რომ 1-ანის გარეშე ყველა ბიჯია, მაგ. დაუშვებელია. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა სამიანის წარმოქმნა შესაძლებელი ხდა. მაშინ 2-ანი ერთი გამოდის. მაშინ 4-ანის 2 ვარიანტი გვაქვს: ან ერთია ან ბიჯია, მაგრამ ეს შეუძლებელია, სადაც 5-ანის და 6-ანის წარმოქმნა ერთ-ერთ ერთ-ერთ. ე.ი. დავასკვნიდით, რომ 4-ანის წარმოქმნა შეუძლებელია. ანუ ავიღოთ ისეთ მაგალითის გზა, სადაც 3, 2 და 4-ის გარეშე ყველა ბუნებრივი წარმოქმნა ამოწურული იქნება.

ერ	ბ	ერ	ბ	ბ	ერ	ერ	ბ	ბ	ერ	ერ	ბ	ბ	ერ	ერ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15 ...
ერ		ერ		ბ		ბ		ერ		ერ		ბ.		
2010		2011		2012		2013		2014		2015		2016.		

აქ მიგვაჩნია, ყველა ჩვენგან წარმოქმნილია, სადაც $3\cdot(4m+1)$ და $3\cdot(4m+2)$ ჩვენგანი ერთია ვერასა ვერ ერთი ერთი, ნიშანი $3(4m+3)$ და $3\cdot 4m$ ჩვენგან ერთი ერთადერთ ერთია. $m \geq 0$. ანუ გამოდის 3-ის 2-ის და 4-ის გარეშე ყველა ჩვენგან მიიღება შესაძლებელია. ამიერ 2016-ის ჩამოვრეკ 2016 ჩვენგანია ე.ი. შეგვიძლია მოვიტანოთ $2016-3=2013$ ჩვენგან ე.ი. $k-1$ მაქს. შესაძლებელია 2013.

მაგიდა № 11	17.04.2016/ მათ/I/ 438

ამოცანა № 3 | გვერდი № 3

ამოცანა დავამტკიცოთ ინდუქციით.

ეს ნიშნავს იმას, რომ $a_n \geq 1$ თუ ეს დავამტკიცეთ, ამოცანა ამოხსნილია.

$$a_{k+1} \geq \frac{k a_k}{a_k^2 + k - 1}.$$

სადაც $k \cdot a_k \geq a_k^2 + k - 1$

ე.ი. სადაც $k \geq a_{k+1}$.

$$a_k \geq \frac{(k-1) a_{k-1}}{a_{k-1}^2 + k - 1 - 1}$$

$$\cancel{k-1} \geq \frac{\cancel{(k-1)} 1 a_{k-1}}{a_{k-1}^2 + k - 2} \quad k \neq 1.$$

$$a_{k-1}^2 + k - 2 \geq a_{k-1}.$$

$$a_{k-1}^2 - a_{k-1} + k - 2 \geq 0.$$

$k-2 \geq 0$ სადაც $k \neq 1$

$a_{k-1}^2 - a_{k-1}$ ბოლოსწინა ინტერვალია ამონაწერ.

~~$a_{k-1}(a_{k-1} - 1)$~~ ე.ი. ლემა დამტკიცებულია.

თუ $k = 1$.

$a_1 \geq 1$ სავარაუდოა.