$P(x) = x^{2016} + 2016x^{2015} + a_{2014}x^{2014} \dots a_1x + 1$

$P(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{2016})$ $x_1, x_2, \dots x_{2016}$ დან 2015 სული ფიქსირებულია.

$P(0) = (-x_1)(-x_2)\dots(-x_{2016}) = x_1x_2\dots x_{2016} = 1 \Rightarrow$ იგი 2015 ფიქსირებულია 2016-ეს უარყოფითია.

ვიეტის კანონიკურად ვიეტის ფორმულა.

$x_1 + x_2 + \dots + x_{2016} = \frac{-a_{2015}}{a_{2016}} = -2016$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2016} x_i = -2016 \\ \prod_{i=1}^{2016} x_i = 1 \\ x_i < 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots 2016\} \end{cases}$$

ეს იგივეა რომ განვიხილოთ 2016 ლენტიანი ჩუხვეთ ჩოტოდან ჭაში 2016 ლ წყალი 1.

$$\begin{cases} x_i > 0 \\ \sum_{i=1}^{2016} = 2016 \\ \prod_{i=1}^{2016} = 1 \end{cases}$$

AM-GM უტოლობის თანახმად $\frac{\sum_{i=1}^{2016} x_i}{2016} \geq \sqrt[2016]{\prod_{i=1}^{2016} x_i} \Rightarrow \frac{2016}{2016} \geq 1$

$1 \geq 1$. მივიღეთ ტოლობა. AM-GM უტოლობაში ტოლობა სრულდება

იმ შემთხვევაში თუ $x_1 = x_2 = \dots = x_{2016} = \frac{x_1 + x_2 \dots + x_{2016}}{2016} = 1 \Rightarrow$ სწორედ x-ების

$x_1 = x_2 = \dots = x_{2016} = -1$

$P(x) = (x+1)^{2016} \Rightarrow \boxed{P(1) = 2^{2016}}$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

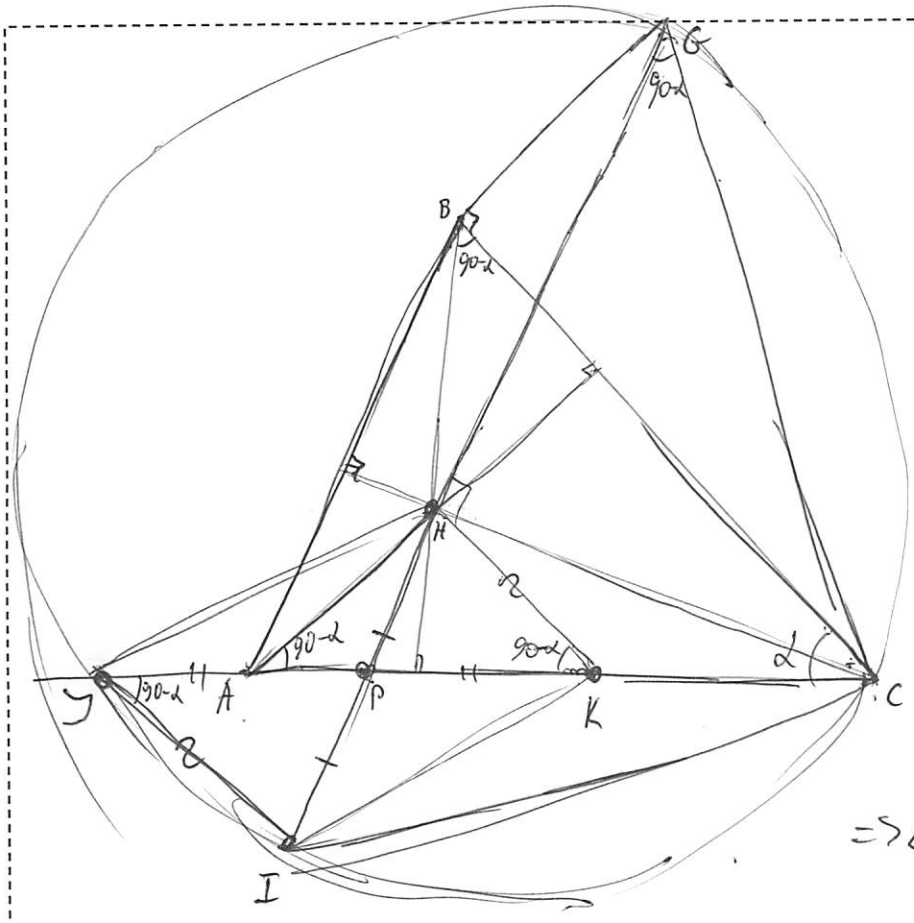
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 57-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 20

18.04.2016/ მათ/II/ 503

ამოცანა № 5

გვერდი № 1



$\angle BCA = \alpha \Rightarrow \angle HAC = 90-\alpha$; $\angle HBC = 90-\alpha$

$BG \parallel AH \Rightarrow \angle GBC = 90°$

$HG \parallel AB \Rightarrow \angle GHC = 90°$

$\angle GHC = \angle GBC \Rightarrow GBHC$ ფოკლუსია $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle HBC = \angle HGC = 90-\alpha$

$JGCI$ ფოკლუსია $\Rightarrow \angle CJI = \angle CGI = 90-\alpha$

P-ლინ AC ფრაგენე გადიკვეთილი

PJ-ს ეფილი მონაკვეთი PK

$\begin{cases} PJ = PK \\ HP = PI \end{cases} \Rightarrow IJHK$ პარალელოგრამია $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KJI = \angle JKH = 90-\alpha$ თან $IJ = HK$

$\angle HAK = \angle HKA = 90-\alpha \Rightarrow HA = HK$; $HK = IJ \Rightarrow \boxed{AH = IJ}$

$10^n \vdots n^3+n^2+n+1$; $n^3+n^2+n+1 = n^2(n+1)+(n+1) = (n^2+1)(n+1)$.

$\text{g.c.d.}(n^2+1; n+1) = \text{g.c.d.}(n^2+1-(n-1)(n+1); n+1) = \text{g.c.d.}(2; n+1) =$ ან 1 ან 2

I) თუ n კენტია $\text{g.c.d.}(n^2+1; n+1)=1$; $n^2+1 \vdots p$; $n+1 \vdots q$; $p, q > 2$ $\in \mathbb{P}$

$10^n \vdots (n^2+1)(n+1) \Rightarrow 5^n \cdot 2^n \vdots p$; $5^n \cdot 2^n \vdots q$; სადაც p და q განსხ. ენები

მიგვაჩნია სიცხადეზეა ეს შეუძლებელია.

II) n ლუწია $\Rightarrow n^2 \equiv 1 \mod (4) \Rightarrow n^2+1 \vdots 4 \Rightarrow n^2+1 = 2 \cdot 5^\alpha$ ($n+1$-ზე ნული

ამიტომ $\alpha > 0$) $n+1 = 2^\beta$

$n+1 = 2^\beta \Rightarrow n = 2^\beta - 1 \Rightarrow n^2 = 2^{2\beta} - 2^{\beta+1} + 1 \Rightarrow n^2+1 = 2^{2\beta} - 2^{\beta+1} + 2$

$2^{2\beta} - 2^{\beta+1} + 2 = 2 \cdot 5^\alpha \Rightarrow 2^{2\beta-1} - 2^\beta = 5^\alpha - 1 \Rightarrow 2^{2\beta-1} - 2^\beta \equiv -1 \pmod 5$

განვიხილოთ 2-ის ხარისხების ნაშთები 5-ზე. $(2; 4; 3; 1)$

თუ $\beta = 4k+1 \Rightarrow 2^{2\beta-1} - 2^\beta = 2^{8k+1} - 2^{4k+1} \equiv 2-2 \equiv 0 \pmod 5$ არ გვაწყობს

თუ $\beta = 4k+2 \Rightarrow 2^{2\beta-1} - 2^\beta = 2^{8k+3} - 2^{4k+2} \equiv 3-4 \equiv -1 \pmod 5$ გვაწყობს

თუ $\beta = 4k+3 \Rightarrow 2^{2\beta-1} - 2^\beta = 2^{8k+5} - 2^{4k+3} \equiv 2-3 \equiv -1 \pmod 5$ გვაწყობს

თუ $\beta = 4k \Rightarrow 2^{2\beta-1} - 2^\beta = 2^{8k-1} - 2^{4k} \equiv 3-1 \equiv 2 \pmod 5$ არ გვაწყობს.

ანუ $\beta = 4k+2$ ან $4k+3$

მაგიდა № 20

18.04.2016/ მათ/II/ 503

ამოცანა № 6

გვერდი № 2

$2^{\beta}(2^{\beta-1}-1) = 5^{\alpha}-1 = (5-1)(5^{\alpha-1}+5^{\alpha-2}\cdots 5+1) = 4(5^{\alpha-1}+5^{\alpha-2}\cdots+1)$

ეგ $\beta \geq 4 \Rightarrow 5^{\alpha}-1 \vdots 16 \Rightarrow 5^{\alpha} \equiv 1 \mod 16$; ვანვიხილოთ 5-ის ხარისხების ნაშთები 16-ზე: $\{5, 9; 13; 1\} \Rightarrow \alpha = 4t$.

ჩაფიქსა $\alpha \vdots 4$ $(5^{\alpha-1}+5^{\alpha-2}\cdots+1)$ შეკვიმდეს ლაკვლი 4-ეულებად.

$2^{\beta}(2^{\beta-1}-1) = 4\cdot(5^{\alpha-4}(5^3+5^2+5+1)+5^{\alpha-8}(5^3+5^2+5+1)+\cdots 1(5^3+5^2+5+1)) =$

$= 4\cdot(125+25+5+1)(5^{\alpha-4}+5^{\alpha-8}\cdots 1) = 4\cdot 4\cdot 39\,(5^{\alpha-4}+5^{\alpha-8}\cdots 1)$

$2^{\beta}(2^{\beta-1}-1) \vdots 39 \Rightarrow 2^{\beta-1}-1 \vdots 39$ ვანვიხილოთ 2-ის ხარისხების ნაშთები 39-ზე: $\{2; 4; 8; 16; 32; 25; 11; 22; 5; 10; 20; 1\}$ $2^{\beta-1} \equiv 1 \pmod{39} \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta-1 \vdots 12 \Rightarrow \beta-1 = 12k \Rightarrow \beta = 12k+1 \Rightarrow \beta = 4t+1$

ზემოთ ჯი ლაკამეკიკეთ ჩომ β შეიძლება იყოს ან $4t+2$ ან $4t+3$ სახის ანუ ლაშვება ჩომ $\beta \geq 4$ ეროსნოსია $\Rightarrow \beta \leq 3$

1) $\beta = 1 \Rightarrow n = 1$; $n^2+1 = 2$; $n+1 = 2$ $10 \vdots 4$ ეროსნოსია

2) $\beta = 2 \Rightarrow n = 3$; $n^2+1 = 10$; $n+1 = 4$. $10^3 \vdots 40$ სნოსია

3) $\beta = 3 \Rightarrow n = 7$; $n^2+1 = 50$; $n+1 = 8$. $10^4 \vdots 2^4\cdot 5^2$ სნოსია

ეროსნოსა: $n = 3$; $n = 7$.