2016 წლის ფიზიკის ნაკრების პირველი შესარჩევი წერა

ამოცანა 1

მუხტების სისტემა (3 ქულა)

დავუშვათ, რომ ვაკუუმში ერთმანეთისაგან სასრულ მანძილებზე მოთავსებულია n რაოდენობა გამტარებისა. მტკიცდება, რომ თითოეული გამტარის პოტენციალი არის ყველა გამტარის მუხტების წრფივი კომბინაცია, რაც მათემატიკურად ასე ჩაიწერება:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} V_{ij} q_j \ ,$$

სადაც φ_i – i-ური გამტარის პოტენციალი, ხოლო q_i - i-ური გამტარის მუხტია ($i = 1, 2, \dots, n$). V_{ij} სიდიდეებს ეწოდებათ პოტენციალური კოეფიციენტები, რომელთა მნიშვნელობა დამოკიდებულია მხოლოდ გამტარების ზომაზე, ფორმასა და ურთიერთგანლაგებაზე. ამ ინფორმაციაზე დაყრდნობით ამოხსენით შემდეგი ამოცანა:

ტოლგვერდა სამკუთხედის წვეროებში მოთავსებულია ლითონის ერთნაირი იზოლირებული ბურთულები. სადენით, რომელიც შეერთებულია ბურთულებისაგან ძალიან შორს მოთავსებულ მუდმივი პოტენციალის მქონე გამტართან, მიმდევრობით ეხებიან თითოეულ ბურთულას. ამის შემდეგ პირველ და მეორე ბურთულაზე აღმოჩნდა შესაბამისად Q_1 და Q_2 მუხტები. იპოვეთ მესამე ბურთულას მუხტი.

ამოხსნა:

ამოცანის სიმეტრიიდან გამომდინარე $V_{11} = V_{22} = V_{33} \equiv A$, $V_{12} = V_{21} = V_{23} = V_{32} = V_{13} = V_{31} \equiv B$. **(1 ქულა)**

პირველი ბურთულას პოტენციალი დამუხტვის შემდეგ $\varphi_1 = AQ_1$ **(0, 5 ქულა)**. შემდეგი ორი ბურთულას დამუხტვისას პირველი ბურთულას პოტენციალი იცვლება, მაგრამ ამას ამოხსნისათვის მნიშვნელობა არა აქვს. მეორე ბურთულას დამუხტვისას მისი პოტენციალი $\varphi_2 = AQ_2 + BQ_1$ **(0,5 ქულა)**. ანალოგიურად მესამე ბურთულასათვის: $\varphi_3 = AQ_3 + B(Q_1 + Q_2)$ **(0,5 ქულა)**. პირობის თანახმად $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$. მაშასადამე,

$$AQ_1 = AQ_2 + BQ_1 = AQ_3 + B(Q_1 + Q_2).$$

აქედან

$$Q_3 = Q_2^2 / Q_1. \quad \textbf{(0, 5 ქულა)}$$

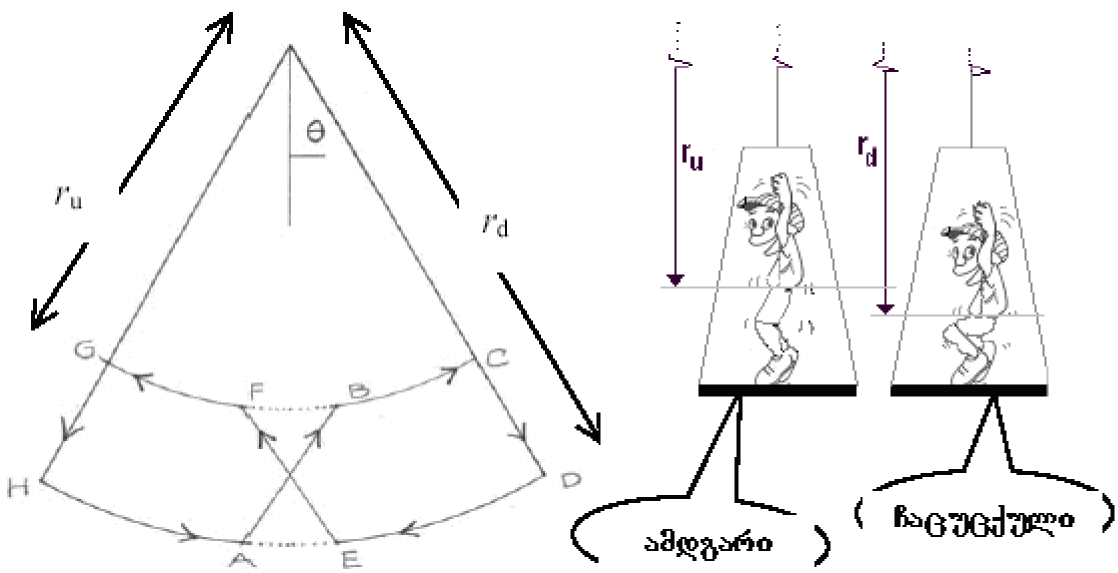
ამოცანა 2

პარამეტრული საქანელა (4 ქულა)

ბავშვი ამლიერებს საქანელას რხევას ადგომით და ჩაცუცქვით. ბავშვის მასათა ცენტრის ტრაექტორია ილუსტრირებულია ნახატზე. საქანელას ბრუნვის ღერძიდან ამდგარი ბავშვის მასათა ცენტრამდე მანძილი იყოს r_u, ხოლო ჩაცუცქული ბავშვის მასათა ცენტრამდე - r_d. r_d მანძილის შეფარდება r_u მანძილთან იყოს $2^{1/15}$.

ანალიზის გასამარტივებლად დავუშვათ, რომ საქანელა უმასოა, რხევის ამპლიტუდა საკმარისად მცირეა და ბავშვის მასა თავმოყრილია მასათა ცენტრში. დავუშვათ აგრეთვე, რომ ადგომისა და ჩაცუცქვის დროები ბევრჯერ ნაკლებია რხევის პერიოდზე და ამიტომ მივიჩნიოთ, რომ ჩაცუცქვა მყისიერად ხდება საქანელას კიდურა მდებარეობებში და ადგომა მყისიერად ხდება წონასწორობის მდებარეობის გავლისას.

განსაზღვრეთ, რამდენი რხევის შემდეგ გაიზრდება საქანელას რხევის ამპლიტუდა (ან მაქსიმალური კუთხური სიჩქარე) ორჯერ.



ამოხსნა:

ადგომის პროცესში (A→B და E→F) ინახება ბავშვის იმპულსის მომენტი საქანელას საკიდის მიმართ:

$$mr_d^2\omega_d = mr_u^2\omega_u$$

საიდანაც $\omega_u = \omega_d \cdot \left(\frac{r_d}{r_u}\right)^2$ **(1 ქულა)**

ამრიგად, ყოველი ადგომისას კუთხური სიჩქარე იზრდება $\left(\frac{r_d}{r_u}\right)^2 -$ ჯერ.

B-დან C–სკენ მოძრაობისას ინახება ენერგია:

$$\frac{1}{2}mr_u^2\omega_{u1}^2 = mgr_u(1-\cos\theta) \qquad \textbf{(0.5 ქულა)}$$

ანალოგიურად ინახება ენერგია C-დან B–სკენ მოძრაობისას:

$$\frac{1}{2}mr_d^2\omega_{d2}^2 = mgr_d(1-\cos\theta) \qquad \textbf{(0.5 ქულა)}$$

ამათგან მიიღება, რომ

$$\omega_{d2} = \omega_{u1}\sqrt{\frac{r_u}{r_d}} \qquad \textbf{(0.5 ქულა)}$$

როგორც უკვე ვაჩვენეთ ჩაცუცქული ბავშვის ადგომისას კუთხური სიჩქარე იზრდება:

$$\omega_{u2} = \omega_{d2}\cdot\left(\frac{r_d}{r_u}\right)^2$$

ნახევარი რხევის განმავლობაში კუთხური სიჩქარის ცვლილებაა:

$$\frac{\omega_{u2}}{\omega_{u1}} = \left(\frac{r_d}{r_u}\right)^{3/2} \qquad \textbf{(0.5 ქულა)}$$

n რხევის განმავლობაში კუთხური სიჩქარის (მასთან ერთად რხევის ამპლიტუდის) ცვლილებაა:

$$\frac{\omega_{u\text{საბ}}}{\omega_{u\text{საწყ}}} = \left(\frac{r_d}{r_u}\right)^{3n} \qquad \textbf{(0.5 ქულა)}$$

პირობის თანახმად მიიღება განტოლება

$$2^{3n/15} = 2$$

საიდანაც n=5 **(0.5 ქულა)**

ამოცანა 3

სამი ცილინდრი დახრილ სიბრტყეზე (8 ქულა)

სამი ერთნაირი მასის, სიგრძის და გარე რადიუსის ცილინდრი დევს ჰორიზონტისადმი α კუთხით დახრილ სიბრტყეზე. საწყის მომენტში ისინი უძრავია. დახრილ სიბრტყესა და ცილინდრებს შორის ხახუნის კოეფიციენტია μ. პირველი ცილინდრი მილია, მეორე - მასიური. მესამე ცილინდრი ისეთივე მილია, როგორიც პირველი, ოღონდ სიღრუე სავსეა სითხით. ამ სითხისა და ცილინდრის კედლის სიმკვრივეები ერთნაირია. სითხით სავსე სიღრუე დახურულია თხელი სახურავებით. სახურავების მასებსა და სითხის ხახუნს ცილინდრთან ნუ გაითვალისწინებთ. პირველი ცილინდრის ნივთიერების სიმკვრივე n- ჯერ მეტია მეორე და მესამე ცილინდრების ნივთიერებათა სიმკვრივეზე.

ა) იპოვეთ ცილინდრების ღერძების აჩქარებები უსრიალოდ გორვისას და შეადარეთ ისინი ერთმანეთს. **(3,5 ქულა)**

ბ) განსაზღვრეთ, რა პირობა უნდა შესრულდეს, რომ არც ერთი ცილინდრი არ სრიალებდეს. **(1,5 ქულა)**

გ) იპოვეთ ცილინდრების კუთხური აჩქარებები სრიალით გორვისას და შეადარეთ ისინი ერთმანეთს. **(1,5 ქულა)**

დ) განსაზღვრეთ სითხისა და მესამე ცილინდრის ურთიერთქმედების ძალა (მოდული და მიმართულება) სრიალით გორვისას, თუ სითხის მასა m_0 ცნობილია. **(1,5 ქულა)**

ამოხსნა:

ა) დახრილ სიბრტყეზე ცილინდრების სრიალის გარეშე გორვისას გვაქვს:

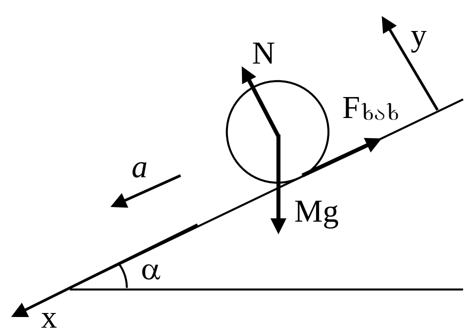
$Mg\sin\alpha - F_{\text{ხახ}} = Ma$

$N - Mg\cos\alpha = 0$

$F_{\text{ხახ}} \leq \mu N$

$a = \varepsilon R$

$F_{\text{ხახ}} R = I\varepsilon$ **(1 ქულა)**



ამ განტოლებებიდან მიიღება, რომ

$$a = \frac{g\sin\alpha}{1 + I/MR^2}$$

(0.5 ქულა)

პირველი და მესამე ცილინდრების შიგა რადიუსები იყოს r, ხოლო პირველი ცილინდრის სიმკვრივე – ρ, მაშინ მეორე და მესამე ცილინდრების სიმკვრივეები იქნება ρ/n. ცილინდრების მასების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\rho\pi(R^2-r^2)L=\frac{\rho}{n}\cdot\pi R^2L\ \Rightarrow\ \frac{r}{R}=\sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

(0,5 ქულა)

$$I_1=\frac{\rho\pi R^2L\cdot R^2}{2}-\frac{\rho\pi r^2L\cdot r^2}{2}=\frac{\rho\pi(R^2-r^2)L(R^2+r^2)}{2}=\frac{M(R^2+r^2)}{2}=\frac{MR^2}{2}\cdot\frac{2n-1}{n}$$

(0,5 ქულა)

$$I_2=\frac{MR^2}{2}$$

მესამე ცილინდრში სითხე არ ბრუნავს, მბრუნავი ნაწილი ისეთივეა, როგორც პირველი ცილინდრი, ოღონდ მასაა M/n, ამიტომ

$$I_3=\frac{MR^2}{2}\cdot\frac{2n-1}{n^2}$$

(0,5 ქულა)

$$a_1=\frac{g\sin\alpha}{1+\frac{2n-1}{2n}},\quad a_2=\frac{g\sin\alpha}{1+\frac{1}{2}},\quad a_3=\frac{g\sin\alpha}{1+\frac{2n-1}{2n^2}}$$

$$\frac{2n-1}{n}>1,\quad \frac{2n-1}{n^2}<1,\text{ამიტომ}\quad a_3>a_2>a_1$$

(0,5 ქულა)

ბ) არ გასრიალების პირობაა $F_{ხახ}\leq\mu N$. მოძრაობის განტოლებების თანახმად

$$F_{ხახ}=\frac{Ia}{R^2}=\frac{Ig\sin\alpha}{R^2(1+I/MR^2)}$$

(0,5 ქულა)

$$N=Mg\cos\alpha$$

აქედან მიიღება

$$\mathrm{tg}\alpha\leq\mu\left(1+\frac{MR^2}{I}\right)$$

(0,5ქულა)

არც ერთი ცილინდრი არ ისრიალებს, თუ ზედა პირობა შესრულდება პირველი ცილინდრისათვის, რომლის ინერციის მომენტი ყველაზე მეტია ე.ი.

$$tg\alpha \le \mu \frac{4n-1}{2n-1}$$

(0,5 ქულა)

გ) სრიალით გორვისას, ყველა ცილინდრისათვის $F_{ხახ}=\mu Mg\cos\alpha$, ამიტომ

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu Mg\cos\alpha}{I_1},\ \varepsilon_2 = \frac{\mu Mg\cos\alpha}{I_2},\ \ \varepsilon_3 = \frac{\mu Mg\cos\alpha}{I_3}$$

(1 ქულა)

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ **(0,5 ქულა)**

დ) სრიალით გორვისას ცილინდრის ღერძის და სითხის საერთო აჩქარება იქნება

$$a=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$$

ცილინდრიდან სითხეზე მოქმედი ძალა იყოს F. გამოვიყენოთ სითხისათვის ნიუტონის მეორე კანონი:

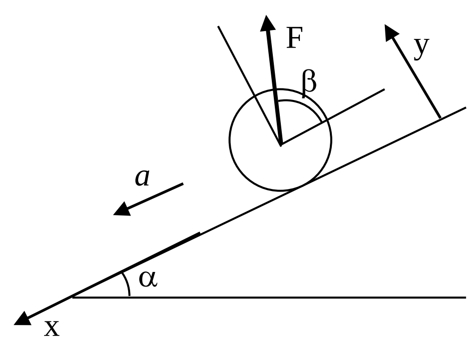
$m_0g\sin\alpha+F_x=ma$, $F_y - m_0g\cos\alpha=0 \Rightarrow F_x= -\mu\, m_0g\cos\alpha$, $F_y= m_0g\cos\alpha$ **(0,5 ქულა)**

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m_o g\sqrt{1+\mu^2}\cos\alpha$$

(0,5 ქულა)

მაშასადამე, ძალის მიმართულება ისეთია, როგორც გამოსახულია ნახატზე

$tg\beta=F_y/|F_x\}=1/\mu$ **(0,5 ქულა)**



ამოცანა 4

რაკეტის მოძრაობა (10 ქულა)

რაკეტას ისვრიან ჩრდილოეთ პოლუსიდან და იგი ხვდება სამიზნეს φ განედის მქონე წერტილში ($\varphi > 0$ ჩრდილოეთ ნახევარსფეროს წერტილებისათვის, $\varphi < 0$ სამხრეთი ნახევარსფეროსთვის). დედამიწის ბრუნვა თავისი ღერძისა და მზის გარშემო უგულებელყავით. რაკეტის მოძრაობა ხდება მხოლოდ სიმძიმის ძალის მოქმედებით.

ა) დაამტკიცეთ, რომ ელიფსზე მოძრავი რაკეტის სრული ენერგია a დიდ ნახევარღერძს უკავშირდება ფორმულით $E = -G\frac{mM}{2a}$, სადაც m რაკეტის მასაა, ხოლო M - დედამიწის. **(2 ქულა)**

ბ) იპოვეთ ჰორიზონტისადმი რა α კუთხით უნდა გავისროლოთ რაკეტა, რომ ეს მოხდეს მინიმალური საწყისი სიჩქარით. გამოსახეთ იგი φ კუთხით. **(3 ქულა)**

გ) იპოვეთ ეს მინიმალური სიჩქარე. გამოსახეთ იგი დედამიწის ზედაპირზე თავისუფალი ვარდნის g აჩქარებით, დედამიწის R რადიუსითა და α კუთხით.

(1 ქულა)

დ) რა მაქსიმალურ სიმაღლეზე ავა რაკეტა მოძრაობისას? გამოსახეთ იგი დედამიწის R რადიუსითა და φ კუთხით. **(3 ქულა)**

ე) რა φ კუთხეს შეესაბამება მაქსიმალური სიმაღლის ყველაზე დიდი და პატარა მნიშვნელობები? რისი ტოლია ეს მნიშვნელობები? **(1 ქულა)**

ამოხსნა:

ა) მუდმივი სიდიდეებია E ენერგია

$$E = -G\frac{mM}{r} + \frac{mV^2}{2}$$

და L იმპულსის მომენტი, რომელიც დიდი ღერძის ორივე ბოლოში არის

$$L = mVr$$

მაშასადამე, დიდი ღერძის ორივე ბოლოში ფოკუსიდან სხეულამდე r მანძილი აკმაყოფილებს განტოლებას

$$E = -G\frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

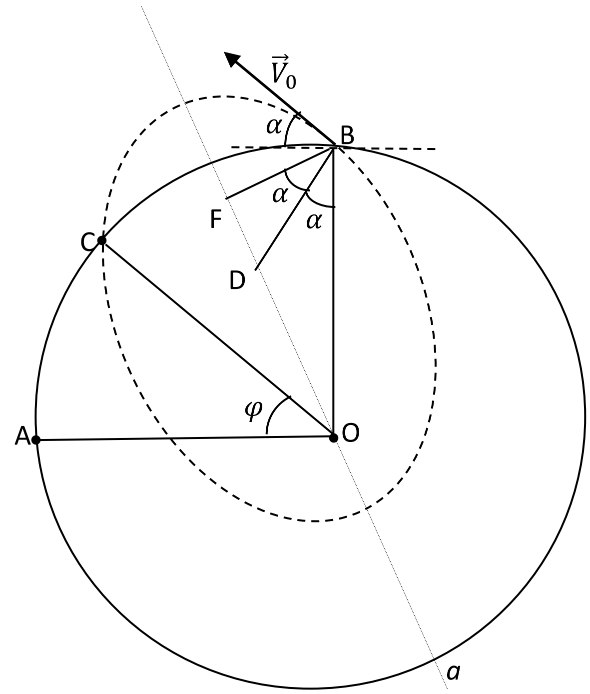
ანუ

$$Er^2 + GmMr - \frac{L^2}{2m} = 0$$ **(1 ქულა)**

ვიეტის თეორემის თანახმად, $r_1 + r_2 = -\frac{GmM}{E}$

მეორე მხრივ $r_1 + r_2 = 2a$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $E = -G\frac{mM}{2a}$ **(1 ქულა)**



ბ) რაკეტის ტრაექტორია არის ელიფსი, რომლის ერთი ფოკუსი დედამიწის ცენტრია (O წერტილი). მეორე ფოკუსი, გასროლის წერტილი და სამიზნე აღვნიშნოთ შესაბამისად F, B და C წერტილებით (ნახ.). a წრფე არის BC მონაკვეთის შუა მართობი. ცხადია, რომ ლინზის ორივე ფოკუსი ამ წრფეზე მდებარეობს.

რაკეტის სრული ენერგია

$$\frac{mV_0^2}{2} - G\frac{mM}{R} = -G\frac{mM}{2a},$$ **(0,5 ქულა)**)

სადაც a - ელიფსის დიდი ნახევარღერძია, R - დედამიწის რადიუსი.

პირობის თანახმად V_0 - მინიმალურია ⇒ a - მინიმალურია. **(0,5 ქულა)**

$R + BF = 2a \Rightarrow BF$ - მინიმალურია. $\Rightarrow BF \perp OF$. **(1 ქულა)**

$\widehat{BOF} = \frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{2}$. $\Rightarrow$ $\widehat{OBF} = \frac{\pi}{2} - \frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{2} = \frac{\varphi+\pi/2}{2}$. **(0,5 ქულა)**

BD$\perp \vec{V}_0$ ⇒ BD არის $\widehat{OBF}$ კუთხის ბისექტრისა (ელიფსის ერთ-ერთი თვისების თანახმად). ⇒

$$\alpha = \frac{\varphi+\pi/2}{4}.$$ **(0,5 ქულა)** (2)

გ) $a = R\cos^2\alpha$, **(0.5 ქულა)** (1) $\Rightarrow V_0 = \frac{\sqrt{gR\cos 2\alpha}}{\cos\alpha}$. **(0.5 ქულა)**

დ) ენერგიის მუდმივობის კანონი -

$$\frac{mV^2}{2} - G\frac{mM}{r} = -G\frac{mM}{2a},$$

იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი -

$$R\,V_0\cos\alpha = rV.$$ **(0,5 ქულა)**

ამ ორი განტოლებიდან მივიღებთ, რომ

$$r = \frac{R\cos 2\alpha}{1 \pm tg\alpha}. \quad \textbf{(1 ქულა)}$$

ცხადია, რომ უნდა ავიღოთ მინუს ნიშანი **(0,5 ქულა)**. მაშინ დედამიწის ზედაპირამდე მაქსიმალური დაშორება იქნება

$$h = r - R = R(\cos\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha) - 1) = \frac{R}{2}\left(\sqrt{2}\cos(2\alpha - \frac{\pi}{4}) - 1\right) = \frac{R}{2}\left(\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2} - 1\right).$$

(1 ქულა)

ე) ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ მაქსიმალურ სიმაღლეზე რაკეტა ადის, თუ სამიზნე ეკვატორზეა ($\varphi = 0$) და $h_{max} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$ **(0,5 ქულა),** ხოლო მინიმალური სიმაღლე შეესაბამება სამიზნეს სამხრეთ პოლუსზე ($\varphi = -\pi/2$) - $h_{min} = 0$. ამ შემთხვევაში რაკეტის მინიმალური სიჩქარე პირველი კოსმოსური სიჩქარის ტოლია და იგი მოძრაობს დედამიწის რადიუსის ტოლი რადიუსის წრეწირზე **(0,5 ქულა)**.