შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები ფიზიკის 47-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

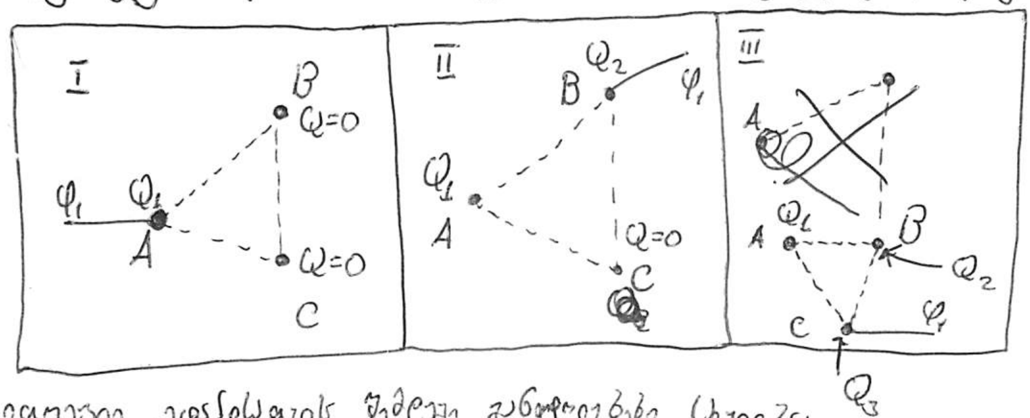
მაგიდა № 18

12.04.2016/ ფიზ/I/ 079

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

ბურთულების დამუხტვის პროცესი შეიძლება შემდეგ ეტაპებად დავყოთ:



თითოეული ეტაპისთვის შემდეგი განტოლებები სრულდება:

$$\mathrm{I}: \ \varphi_1 = V_{11}^{\mathrm{I}} Q_1 ; \quad \mathrm{II}: \ \varphi_1 = V_{11}^{\mathrm{II}} Q_1 + V_{12}^{\mathrm{II}} Q_2 ; \quad \mathrm{III} \ \varphi_1 = V_{11}^{\mathrm{III}} Q_1 + V_{12}^{\mathrm{III}} Q_2 + V_{13}^{\mathrm{III}} Q_3$$

ვინაიდან პოტენციალური კოეფიციენტები დამოკიდებულია მხოლოდ სივრცეში განლაგებაზე, შესაბამისად: $V_{11}^{\mathrm{I}} = V_{12}^{\mathrm{II}} = V_{13}^{\mathrm{III}}$ რაც განპირობებულია სამივე ეტაპზე შესაბამისი ~~[illegible]~~ მდებარეობის ფორმის იდენტურობით (ტოლგვერდა + ტოლფერდა), ასევე სიმეტრიის შემდეგი ნიშნით: $V_{11}^{\mathrm{II}} = V_{12}^{\mathrm{III}} = V_{13}^{\mathrm{III}}$, შესაბამისად მიიღება შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} \varphi_1 = a Q_1 \\ \varphi_1 = a Q_2 + b Q_1 \\ \varphi_1 = a Q_3 + b Q_1 + b Q_2 \end{cases}$$

სადაც $a \equiv V_{11}^{\mathrm{I}} = V_{12}^{\mathrm{II}} = V_{13}^{\mathrm{III}}$

$b \equiv V_{11}^{\mathrm{II}} = V_{12}^{\mathrm{III}} = V_{13}^{\mathrm{III}}$

აქედან $Q_3 = \dfrac{\varphi_1 - b(Q_1 + Q_2)}{a}$

$a = \varphi_1 / Q_1 ; \quad b = \dfrac{\varphi_1}{Q_1}\left(1 - \dfrac{Q_2}{Q_1}\right)$

შესაბამისად:

$$Q_3 = Q_1 - \left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right)(Q_1 + Q_2)$$

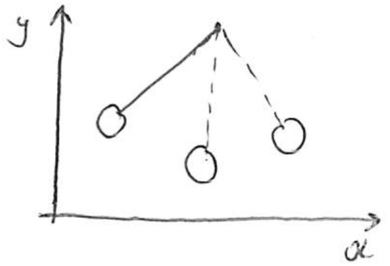
შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები ფიზიკის 47-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 18 | 12.04.2016/ ფიზ/I/ 079

ამოცანა № 2 | გვერდი № 1

მოცემული ცვლადსიგრძიანი ქანქარა, რომლის ზოგადი სახე შემდეგნაირია:



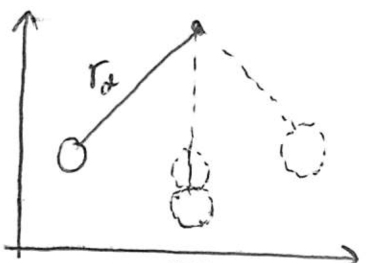
ხოლო ამონახსნს შემდეგი განტოლებები:

$$x(t)=A^{(x)}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$y(t)=\left(A^{(y)}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

განვიხილოთ სიგრძის ცვლილების თითოეული ეტაპი:

I $t=0$

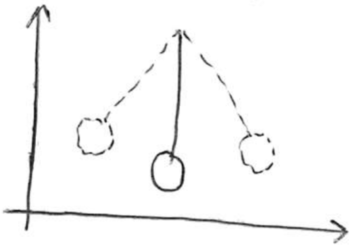


ქანქარის საწყისი სიგრძეა r_d, შესაბამისად მისი პერიოდი:

$$T^{(d)}=2\pi\sqrt{r_d/g}$$ და კოორდინატები:

$$x(0)=A_0^{(x)}\ ;\ y(0)=0.$$

II $t=T^{(d)}/4$



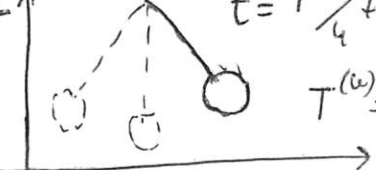
ამ დროის მომენტში ხდება ქანქარის სიგრძის ცვლილება $r_d\to r_u$, შესაბამისად კოორდინატის დროზე დამოკიდებულება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$A_0^{(y)}\sin\left(\sqrt{g/r_d}\,\frac{2\pi}{4}\sqrt{r_d/g}\right)=A_1^{(y)}\sin\left(\sqrt{g/r_u}\,\frac{2\pi}{4}\sqrt{r_d/g}\right)$$

შესაბამისად:

$$A_1^{(y)}=\frac{A_0^{(y)}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{r_d/r_u}\right)}$$

III $t=T^{(d)}/4+T^{(u)}/4$ სადაც $T^{(u)}=2\pi\sqrt{r_u/g}$



$r_u\to r_d$

შესაბამისად:

$$A_1^{(x)}\cos\left(\sqrt{g/r_u}\,\frac{\pi}{2\sqrt{g}}\left(\sqrt{r_d}+\sqrt{r_u}\right)\right)=A_2^{(x)}\cos\left(\sqrt{g/r_d}\,\frac{\pi}{2\sqrt{g}}\left(\sqrt{r_d}+\sqrt{r_u}\right)\right)\to$$

$$\to A_2^{(x)}=A_1^{(x)}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{r_d/r_u}+1\right)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{r_u/r_d}+1\right)\right)}$$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

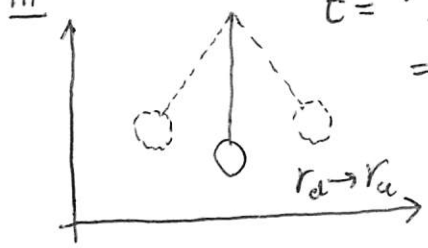
შესარჩევი ტურები ფიზიკის 47-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 18

12.04.2016/ ფიზ/I/ 079

ამოცანა № 2

III



$$t = \frac{T^{(d)}}{4} + \frac{T^{(u)}}{4} + \frac{T^{(d)}}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{r_d} + \frac{\sqrt{r_u}}{2}\right)$$

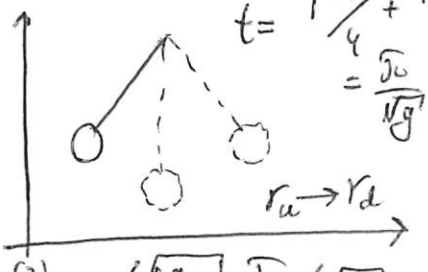
შემდეგ სიგრძის შემცირ. დროს

$$A_2^{(y)} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{r_d}}\frac{\pi}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{r_d} + \frac{\sqrt{r_u}}{2}\right)\right) = A_3^{(y)} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{r_u}}\frac{\pi}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{r_d} + \frac{\sqrt{r_u}}{2}\right)\right)$$

ამიტომ:

$$A_3^{(y)} = A_2^{(y)} \frac{\sin\left(\pi\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_u}{r_d}}\right)\right)}{\sin\left(\pi\left(\sqrt{\frac{r_d}{r_u}} + \frac{1}{2}\right)\right)}$$

IV



$$t = \frac{T^{(d)}}{4} + \frac{T^{(u)}}{4} + \frac{T^{(d)}}{4} + \frac{T^{(u)}}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{r_d} + \sqrt{r_u}\right)$$

ანალოგიურად:

$$A_3^{(x)} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{r_u}}\frac{\pi}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{r_d} + \sqrt{r_u}\right)\right) = A_4^{(x)} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{r_d}}\frac{\pi}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{r_d} + \sqrt{r_u}\right)\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow A_4^{(x)} = A_3^{(x)} \frac{\cos\left(\pi\left(\sqrt{\frac{r_d}{r_u}} + 1\right)\right)}{\cos\left(\pi\left(\sqrt{\frac{r_u}{r_d}} + 1\right)\right)}$$

შევნიშნავ, რომ გავითვალისწინე, რომ ორთოგონალური ამპლიტუდები ურთიერთ ნებისმიერად დამოკიდებულია: $A^{(x)} = KA^{(y)}$; $K \in \mathbb{R}e$

მიღებულ შედეგში ჩავსვათ ერთი სხვადასხვა შედეგს მივიღებთ ამპლიტუდას;

$$A_ч = \frac{\cos\left(\pi\left(\sqrt{r_д/r_ч}+1\right)\right)}{\cos\left(\pi\left(\sqrt{r_ч/r_д}+1\right)\right)}\,\frac{\sin\left(\pi\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{r_ч/r_д}\right)\right)}{\sin\left(\pi\left(\sqrt{r_д/r_ч}+1/2\right)\right)}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{r_д/r_ч}+1\right)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{r_ч/r_д}+1\right)\right)}\,\frac{A_0}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{r_д/r_ч}\right)}$$

სიმარტივისთვის $K \equiv A_ч/A_0$ ~~[illegible]~~ აღნიშნულია ერთი ციკლის შემდეგ ~~[illegible]~~ მიღებული ამპლიტუდის და საწყისი ამპლიტუდის შეფარდება, შესაბამისად n ციკლისათვის

~~[illegible]~~ $\frac{A^{(n)}}{A^{(0)}} = K^n$ ← n-ური ციკლი. ამპლიტუდის ორჯერ გაზრდა ნიშნავს:

$K^n = 2$, შესაბამისად $n = \log_K(2) \rightarrow$

$$\rightarrow n = \frac{\ln(2)}{\ln(K)}$$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები ფიზიკის 47-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

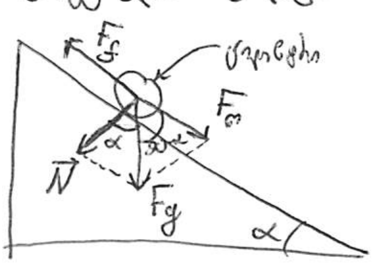
მაგიდა № 18

12.04.2016/ ფიზ/I/ 079

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

ა) მოცემულ ზედაპირზე სრიალი:



ცილინდრზე მოქმედებს გრავიტაციული და ხახუნის ძალები, შესაბამისად: $|\vec{N}| = \cos\alpha\, F_g = mg\cos\alpha$ ამიტომ:

$-\vec{F_f} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$ და

$\vec{F_\parallel} = mg\sin\alpha$, ნიუტონის II კანონიდან:

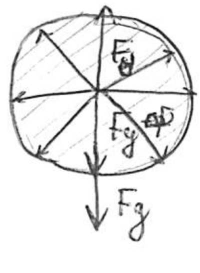
$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \rightarrow a = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$ სადაც

a არის ცილინდრის ღერძის აჩქარება.

ბ) ახლა ცილინდრი, როცა არ სრიალებს ანუ შესაბამის ზედაპირზე ჩერდება:

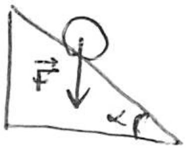
$a = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha = 0$ ანუ არის $\alpha = \tan^{-1}(\mu)$

გ) ~~[illegible]~~ სითხე და მთელ ცილინდრს ერთად მოქმედებს გრავიტაციული და ცენტრიდანული ძალები, შესაბამისად:



$$m_0(g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha) + m_0 g = \vec{F}$$

შესაბამისი ტოლქმედი მიმართულება



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები ფიზიკის 47-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

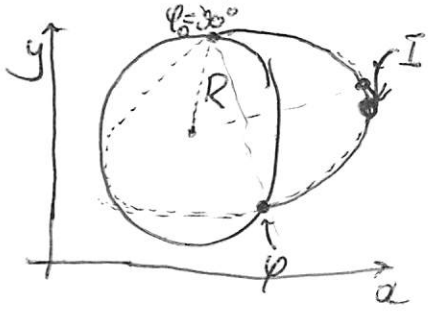
მაგიდა № 18

12.04.2016/ ფიზ/I/ 079

ამოცანა № 4

გვერდი № 1

მოცემული სურათი:



ა) სრული სისტემის ენერგია გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$E_{ს}=\frac{m}{2}\underbrace{\left(\frac{dr}{dt}\right)}_{V}^{2}-\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad ; \quad (1)$$

რადგან სხეული ელიფსზე მოძრაობს მისი ტრაექტორიის განტოლება შემდეგია:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2 \quad \text{აქედან} \quad y=\pm b\sqrt{r^2-\frac{x^2}{a^2}}$$

სრული სიჩქარე ელიფსზე შემდეგი ფორმულით: $V=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ აქედან:

$$V=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\frac{dx}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{4b^2x^2}{a^4r^2-a^2x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}=$$

$$=\left(\frac{dx}{dt}\right)\sqrt{1+\frac{4b^2x^2}{a^4r^2-a^2x^2}}$$

. რადგან სრული სისტემის ენერგია მუდმივია (ანუ ...), ამიტომ შემდეგი ფორმულა $\frac{\partial E_{ს}}{\partial t}=0$, შესაბამისად ... და ... , ... , შესაბამისად ... I წერტილში $\frac{dx}{dt}=0$ ... , როცა $x=ra$ შესაბამისად განტ. (1) იღებს შემდეგ სახეს:

$$E_{ს}=\underbrace{\frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left(1+\frac{4b^2x^2}{a^4r^2-a^2x^2}\right)\right)}_{0}-\frac{GMm}{\sqrt{r^2a^2+0}}=-\frac{GMm}{\sqrt{r^2a^2}}=-\frac{GMm}{ra}$$

$$V_0=\sqrt{\frac{GM}{ra}}$$ ← საჭირო საწყისი სიჩქარე