

# მეცნიერების და ინოვაციების საერთაშორისო კვირეული

საქართველო 2015



# “საინტერესო ამოცანები ალბათობის თეორიიდან”

პეტრე ბაბილუა

ივ. ჯავახიშვილის თბილისის სახელმწიფო  
უნივერსიტეტი

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

აღბათობის თეორია მათემატიკური მეცნიერების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი დარგია, რომელიც გვეხმარება ბუნებაში არსებული მოვლენებისა და მიმდინარე პროცესების თვისებრივ და რაოდენობრივ აღწერა-შესწავლაში.

მიუხედავად ჩვენს გარშემო არსებული მოვლენებისა და პროცესების უდიდესი მრავალნაირობისა, გარკვეული თვალსაზრისით ისინი ორ დიდ ჯგუფად შეიძლება დავეყოთ: დეტერმინისტულ და შემთხვევით მოვლენებად და პროცესებად. ქვა რომ ავწიოთ დედამიწიდან და ხელი გავუშვათ, ის აუცილებლად დაგვარდება დედამიწაზე (მსოფლიო მიზიდულობის კანონი დეტერმინისტულია). მაგრამ არსებობს მოვლენები, რომელთათვისაც ვერ ხერხდება ისეთი პირობების დადგენა, რომლებიც უზრუნველყოფენ მოვლენების აუცილებლად მოხდენას. ასეთ მოვლენებს შემთხვევით ხდომილებებს ვუწოდებთ.

წარმოვიდგინოთ ასეთი ცდა: ავაგდოთ მონეტა და დავაფიქსიროთ, დავარდნის შემდეგ რომელი მხარე აღმოჩნდება ზემოდან “გერბი” თუ “საფასური”. ეს შემთხვევითი ცდაა, ვინაიდან მისი შედეგი შემთხვევითია, რადგან ვერ დავასახელებთ პირობებს, რომლებიც ცალსახად უზრუნველყოფენ შედეგს.

სწორედ შემთხვევით ხდომილებებთან და შემთხვევით პროცესებთან დაკავშირებული კანონზომიერებების შესასწავლად გამოიყენება ალბათობის თეორია. რა არის მათემატიკური ალბათობა?

# რა არის მათემატიკური ალბათობა ?

მივაქციოთ ყურადღება ამ ნაკვეთის სათაურს. აქ ჩვენ ვიხმარეთ “მათემატიკური ალბათობა” ნაცვლად ალბათობისა. სიტყვას “ალბათობა” ჩვეულებრივ საუბარში თვისებრივი დატვირთვა აქვს და არა რაოდენობრივი. როდესაც ამბობენ ხვალ ალბათ წვიმა იქნებაო, ან – დღეს ალბათ ჩვენი გუნდი მოიგებსო, რა თქმა უნდა, გარკვეული მოსაზრებები აქვთ მხედველობაში. მაგრამ არც ეს მოსაზრებები და არც მათზე დაყრდნობილი ალბათობა ანუ მოსალოდნელობის ზომა, რაოდენობრივად არ არის ხოლმე წარმოდგენილი. ასეთი ალბათობის სიდიდე დამოკიდებულია პიროვნებაზე, მის ცოდნაზე, მის განწყობაზე, ზოგჯერ მის სურვილზეც კი. ასეთ ალბათობას ობიექტური, ყველასათვის ერთნაირად მისაღები მნიშვნელობა არა აქვს, ის სუბიექტურია. სუბიექტური ალბათობა საინტერესო და მნიშვნელოვანი ცნებაა, მაგრამ არა საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათათვის, არამედ მეცნიერებისათვის ადამიანთა განწყობის, მიდრეკილებებისა და ქცევის შესახებ, უპირატესად ფსიქოლოგიისათვის. ამ წიგნში ჩვენ გვაინტერესებს ალბათობის მათემატიკური ცნება. გავიმეოროთ ამ ნაკვეთის სათაურში დასმული შეკითხვა: რა არის მათემატიკური ალბათობა?

ამ შეკითხვაზე ერთბაშად პასუხის გაცემა არ გამოგვივა, ეს საკითხი ნაწილ-ნაწილ უნდა გავარკვიოთ. ერთბაშად ის შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ალბათობა ფუნქციაა, ოღონდ ისეთი კი არა, როგორიც, მაგალითად, ლოგარიტმია, რომლის არგუმენტები რიცხვებია. ალბათობის არგუმენტები შემთხვევითი ხდომილებებია – ყოველ ხდომილებას თავისი ალბათობა უნდა ჰქონდეს. ალბათობები, ანუ ალბათური ფუნქციები, ცხადია, ბევრია, ისევე როგორც მათემატიკურ ანალიზში ლოგარიტმის გარდა კიდევ უამრავი სხვა ფუნქციაც არსებობს სხვადასხვა საჭიროებისათვის. მაგრამ ხდომილებათა კლასზე განსაზღვრული ყოველნაირი ფუნქცია ალბათობა არ არის. ალბათურ ფუნქციებს გარკვეული თვისებები უნდა ჰქონდეთ. უფრო მეტიც, ხდომილებათა კლასსაც სპეციალური თვისებები უნდა გააჩნდეს იმისათვის, რომ მასზე ალბათური ფუნქციების განსაზღვრა შესაძლებელი იყოს. სწორედ აქაა ის თეორიული სირთულეები, რომელთა გადალახვა ერთბაშად ძნელია და ამიტომ საფეხურებრივი მიდგომა უფრო გამართლებული ჩანს. ალბათობის ცნების გასარკვევად ჯერ ხდომილებებზე უნდა ვთქვათ ცოტა მეტი.

წარმოვიდგინოთ რაიმე შემთხვევითი ცდა. შემთხვევითი ცდის ყველა შესაძლო შედეგთა სიმრავლე ჩვეულებრივ აღინიშნება მთავრული ომეგა ასოთი  $\Omega$ , მისი ელემენტები – ნუსხური ომეგებით  $\omega$ ,  $\omega \in \Omega$  (სიმბოლო  $\in$  აღნიშნავს მიკუთვნებას,  $\omega$  ეკუთვნის  $\Omega$ -ს). ცხადია იგულისხმება, რომ სხვადასხვა  $\omega$ -ები ცდის სხვადასხვა შესაძლო ელემენტარულ შედეგს აღნიშნავს, ანუ არც ერთი  $\omega$  “დაშლადი” არ არის – არ წარმოიდგინება რაიმე სხვა შედეგების საშუალებით. ასეთ  $\omega$ -ს, ანუ ცდის ყოველ ელემენტარულ შესაძლო შედეგს ელემენტარული ხდომილება ეწოდება ამგვარად  $\Omega$  ელემენტარულ ხდომილებათა სიმრავლეა, მისი ელემენტები არც რიცხვებია, არც ვექტორები, არც სხვა რაიმე ტრადიციული მათემატიკური ობიექტები,  $\Omega$  აბსტრაქტული სიმრავლეა.

**განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევითი ცდის მაგალითი:** ვთქვათ ექსპერიმენტი ნიშნავს სიმეტრიული მონეტის აგდებას. ვაკვირდებით, რა “მოდის” დავარდნილ მონეტაზე. ამ ექსპერიმენტის შედეგებია: “გერბის მოსვლა” (გ) და “საფასურის მოსვლა” (ს). ამ შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება  $\Omega = \{ს, გ\}$ .

**განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი:** აგორებენ ორ კამათელს. ყოველ მოსალოდნელ შედეგს შევუსაბამოთ რიცხვთა წყვილი  $(i, j)$ , სადაც  $i$  პირველ კამათელზე მოსასვლელი რიხვია, ხოლო  $j$  - მეორეზე. ამ ცდისათვის ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცეა:

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

# მოქმედებები ხდომილობებზე

შევთანხმდეთ, რომ სიმოკლისათვის ყველგან ნაცვლად სიტყვებისა “შემთხვევითი ხდომილება” ვიხმართ სიტყვას “ხდომილება”. დისკრეტულ თეორიაში განიხილება მხოლოდ ისეთ შემთხვევით ცდებთან დაკავშირებული საკითხები, რომელთა შესაძლო შედეგთა სიმრავლე ანუ ელემენტარულ ხდომილებათა სიმრავლე  $\Omega$  სასრულია ან თვლადი. ამ შემთხვევაში ხდომილებათა კლასის განსაზღვრა ადვილია, ნებისმიერი ასეთი  $\Omega$ -სთვის მისი ყოველი ქვესიმრავლე ცხადდება ხდომილებად, ე.ი. ასეთ შემთხვევაში ხდომილებათა კლასი მაქსიმალურია, ის ემთხვევა  $\Omega$ -ს ყველა ქვესიმრავლეთა კლასს, ე.ი. ელემენტარულ ხდომილებათა ნებისმიერი ერთობლიობა ხდომილებაა.

ახლა გავარკვიოთ, თუ რას ნიშნავს ხდომილების მოხდენა. რაიმე  $A$  ხდომილების მოხდენა უნდა გავიგოთ როგორც ერთ-ერთი ისეთი ელემენტარული ხდომილების მოხდენა, რომელიც  $A$  ხდომილებას ანუ  $A$  სიმრავლეს ეკუთვნის. ამიტომ  $A$  ხდომილებაში შემაგაღ ელემენტარულ ხდომილებებს  $A$ -ს ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებებს უწოდებენ.

მაგალითად, თუ ცდა ერთი კამათლის გაგორებაა, მას 6 შესაძლო ურთიერთგამომრიცხავი შედეგი აქვს, ანუ გვაქვს 6 ელემენტარული ხდომილება: კამათლის დავარდნა რიცხვზე 1, ან 2, ან 3, ან 4, ან 5, ან 6. ელემენტარულ ხდომილებათა დალაგების რიგს მნიშვნელობა არა აქვს, მაგრამ მოხერხებულია  $\omega_1$  აღნიშნავდეს კამათლის დავარდნას რიცხვზე 1,  $\omega_2$  – 2-ზე და ა.შ. ელემენტარულ ხდომილებათა ნებისმიერ სიმრავლეს (ერთობლიობას) ხდომილება ეწოდება. ერთ-ერთი ხდომილება  $A$  არის კამათლის დავარდნა ლუწ რიცხვზე. ამ ხდომილების ხელშემწყობია  $\omega_2, \omega_4, \omega_6$  ელემენტარული ხდომილებები, ე.ი.  $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ .

ხდომილებები ძირითადი  $\Omega$  სიმრავლის (ელემენტარულ ხდომილებათა სიმრავლის) ქვესიმრავლებია. ამიტომ მათზე, ისევე როგორც საზოგადოდ სიმრავლეებზე, განისაზღვრება სიმრავლური ოპერაციები: **თანაკვეთა** (ანუ გადაკვეთა, გამრავლება), **გაერთიანება** (ზოგჯერ ამბობენ “შეკრება”), **გამოკლება**, **სიმეტრიული გამოკლება**. ამ ოპერაციების აღნიშვნები და შინაარსი იგივეა, რაც ზოგადად სიმრავლეებისთვის. კერძოდ:

$\{\omega: \omega \in A\}$  ნიშნავს ყველა იმ  $\omega$  ელემენტების ერთობლიობას, რომლებიც ეკუთვნიან ხდომილებას, ანუ სიმრავლეს.

1.  $A$  და  $B$  ხდომილებათა თანაკვეთა აღინიშნება  $AB$ -თი და განისაზღვრება ტოლობით  $AB = \{\omega: \omega \in A \text{ და } \omega \in B\}$  ანუ  $AB$  არის ხდომილება, რომელიც მდგომარეობს  $A$  და  $B$  ხდომილებათა ერთად მოხდენაში. თუ  $A$ -ს და  $B$ -ს ერთად მოხდენა შეუძლებელია ანუ  $AB = \emptyset$ , მაშინ ამბობენ, რომ  $A$  და  $B$  უთავსადი ანუ ურთიერთგამომრიცხავი (ურთიერთთანაუკვეთი) ხდომილებებია.

2.  $A$  და  $B$  ხდომილებების გაერთიანება აღინიშნება სიმბოლოთი  $\cup$  და განისაზღვრება ტოლობით  $A \cup B = \{\omega: \omega \in A \text{ ან } \omega \in B\}$ . ეს ტოლობა იმას ნიშნავს, რომ  $A \cup B$  არის ხდომილება, რომელიც ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ხდება ან  $A$  ან  $B$ , ან ორივე ერთად.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ცნობილია რომ  $A$  და  $B$  უთავსადი ხდომილებებია, ანუ  $AB = \emptyset$ , ნაცვლად ტერმინისა “გაერთიანება” და აღნიშვნისა  $A \cup B$  ხშირად გამოიყენება სიტყვა “შეკრება” და აღნიშვნა  $A + B$ .

3.  $A$  ხდომილებას გამოკლებული  $B$  ხდომილება აღნიშნება სიმბოლოთი  $A \setminus B$  და არის ხდომილება, რომელიც იმას ნიშნავს, რომ ხდება ხდომილება  $A$  და არ ხდება ხდომილება  $B$ , ანუ  $A \setminus B = \{\omega: \omega \in A \text{ და } \omega \notin B\}$ .

4.  $A$  და  $B$  ხდომილებათა სიმეტრიული სხვაობა  $A \Delta B$  არის ხდომილება, რომელიც ნიშნავს იმას, რომ ხდება ერთ-ერთი  $A$  და  $B$  ხდომილებათა შორის, მაგრამ ორივე ერთად არ ხდება. ადვილი მისახვედრია, რომ  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus AB$ . ასევე ადვილად შეიძლება გაჩვენოთ, (აჩვენეთ) რომ სამართლიანია ტოლობა  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ . თუ  $A$  და  $B$  უთავსადი ხდომილებებია, მაშინ  $A \Delta B = A \cup B$ .

5.  $A$  ხდომილების დამატება ანუ დამატებითი ხდომილება  $\bar{A}$  (იხმარება აგრეთვე აღნიშვნა  $A^c$ ) განისაზღვრება როგორც ხდომილება, რომელიც ნიშნავს  $A$  ხდომილების არმოხდენას, ანუ  $\bar{A} = \{\omega: \omega \notin A\} = \Omega \setminus A$ . ცხადია, რომ  $\bar{\bar{A}}$  (ანუ  $A$ -ს დამატების დამატება) არის  $A$ .

6. ახლა ჩვენ მივიღებთ ფორმულას, რომელიც გამოიყენება ხდომილებათა გაერთიანებაში შემავალ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობის დასათვლელად.  $A$  ხდომილებაში შემავალ ყველა ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა აღვნიშნოთ სიმბოლოთი  $|A|$  (გამოიყენება აგრეთვე აღნიშვნა  $n_A$ ). ჯერ განვიხილოთ ორი სიმრავლის გაერთიანების შემთხვევა. ადვილი მისახვედრია, რომ

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |AB|.$$

მართლაც, ჯამი  $|A| + |B|$   $A$  და  $B$  სიმრავლეების თანაკვეთის ხდომილებათა რაოდენობას ორჯერ შეიცავს, ერთხელ როგორც  $|A|$ -ს ნაწილს, მეორედ როგორც  $|B|$ -ს ნაწილს და ამიტომ გამოვაკელით  $|A| + |B|$  ჯამს  $|AB|$  რაოდენობა. ამ ტოლობის გამოყენებით იოლად მიიღება ტოლობა:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |AB| - |AC| - |BC| + |ABC|.$$

**განსაზღვრება 1.** დისკრეტულ ალბათობის თეორიაში ელემენტარულ ხდომილებათა სიმრავლის ნებისმიერი  $A$  ქვესიმრავლე ხდომილებაა. მისი ალბათობა ტოლია მის ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა ალბათობების ჯამის, ანუ

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

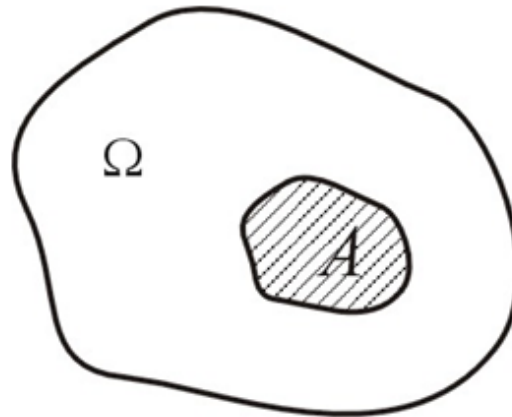
**შენიშვნა 1.** ვინაიდან შეუძლებელი ხდომილების ალბათობა არც ერთი ხდომილების ალბათობაზე მეტი არ უნდა იყოს და, მეორეს მხრივ, აუცილებელ ხდომილებას ყველა ელემენტარული ხდომილება უწყობს ხელს, ფორმულაში მონაწილე  $P(\omega)$  რიცხვები, შესაბამისად, შემდეგ ორ პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს

$$1) \quad 0 \leq P(\omega) \leq 1 \text{ ყველა } \omega\text{-სთვის } \Omega\text{-დან,} \quad 2) \quad \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1.$$

**შენიშვნა 2 (ალბათობის კლასიკური განსაზღვრება).** წინა შენიშვნიდან პირდაპირ გამომდინარეობს, რომ იმ შემთხვევაში, თუ ყველა ელემენტარულ ხდომილებათა საერთო რაოდენობა სასრული  $n$  რიცხვია და ყველას ერთი და იგივე ალბათობა აქვს, მაშინ ყოველი მათგანის ალბათობა არის  $1/n$ . ამ შემთხვევაში ტოლობა გვეუბნება, რომ ყოველი  $A$  ხდომილების ალბათობა არის  $n_A/n$ , სადაც  $n_A$  არის ხდომილებაში შემავალ ელემენტარულ ხდომილებათა საერთო რაოდენობა. ასეთ შემთხვევაში განსაზღვრებას ალბათობის კლასიკური განსაზღვრება ეწოდება.

# გეომეტრიული და პირობითი ალბათობა

ვთქვათ,  $\Omega$  არ არის დისკრეტული. ის არის შემოსაზღვრული სიმრავლე და ცდა მდგომარეობს  $\Omega$ -დან შემთხვევითი წერტილის შერჩევაში, ამასთან თითოეული წერტილის შერჩევა ტოლშესაძლებელია. ამასთან,  $A$  ხდომილება იყოს წერტილის შერჩევა  $A$  არიდან. მაშინ  $A$  ხდომილების მოხდენის ალბათობა ასე გამოითვლება:



$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)},$$

სადაც  $mes$  აღნიშნავს  $A$  არის ზომას, რომელიც შეიძლება იყოს სიგრძე, ფართობი ან მოცულობა, ხოლო ამ ფორმულას ეწოდება გეომეტრიული ალბათობა.

$A$  ხდომილების პირობითი ალბათობა იმ პირობაში, რომ ადგილი ჰქონდა (მოხდა)  $B$  ხდომილებას, აღინიშნება  $P(A|B)$  (ან  $P_B(A)$ ) და განიმარტება შემდეგნაირად:

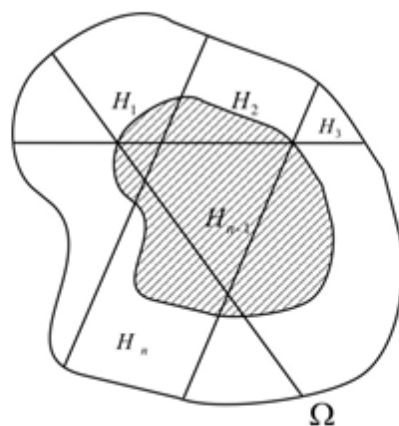
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0.$$

პირობითი ალბათობის ცნებიდან მიიღება წამრავლის ალბათობის ფორმულა:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B),$$

რომელიც შეიძლება ზოგადი შემთხვევისთვის დავწეროთ:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$



**სრული ალბათობის ფორმულა:** თუ  $H_1, H_2, \dots, H_n$  ხდომილებები ქმნიან  $(H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega, H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, \dots, n)$  სრულ სისტემას, მაშინ ადგილი აქვს სრული ალბათობის ფორმულას

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(A | H_i),$$

კერძო შემთხვევაა

$$P(A) = P(B) \cdot P(A | B) + P(\bar{B}) \cdot P(A | \bar{B}).$$

თუ  $H_1, H_2, \dots, H_n$  ხდომილებათა სრული სისტემაა, მაშინ ადგილი აქვს **ბაიესის ფორმულას**

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A | H_i)}{\sum_{j=1}^n P(H_j) \cdot P(A | H_j)}.$$

# ამოცანები

**მაგალითი 1.** მონეტას ვაგდებთ გერბზე ორჯერ ზედიზედ დავარდნამდე. მოვძებნოთ ალბათობა იმისა, რომ ცდის დამთავრებას დასჭირდება არა უმეტეს ხუთი აგდებისა.

**ამოხსნა.** აღვნიშნოთ გ და ს ასოებით, შესაბამისად, გერბზე და საფასურზე დავარდნა. ცხადია, რომ: ცდა 2 აგდებით დამთავრდება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ შედეგი არის გგ; 3 აგდება დაამთავრებს ცდას მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ შედეგი არის სგგ; 4 აგდებით ცდის დამთავრებისთვის შედეგი უნდა იყოს გსგგ ან სსგგ; 5 აგდებით – სგსგგ, გსსგგ ან სსსგგ. ესაა ყველა ის ხდომილება, რომლებიც გვაძლევს ცდის დამთავრებას არაუმეტეს ხუთ აგდებაში. ადვილი მისახვედრია, რომ რაკი მონეტის აგდებებს ერთმანეთთან არანაირი კავშირი არა აქვთ, ამ ხდომილებათა ალბათობები უნდა იყოს, შესაბამისად,  $1/4$ ,  $1/8$ ,  $1/16$ ,  $1/16$ ,  $1/32$ ,  $1/32$ ,  $1/32$ . მაშასადამე, რაკი ეს ხდომილებები ურთიერთგამომრიცხავებია (რატომ არის?), საძებნი ალბათობა არის მათი ალბათობების ჯამი ანუ  $19/32$ .

**მაგალითი 2.**  $n$  პიროვნება მიუჯდა სიგრძივ განლაგებულ  $n$  სკამს შემთხვევითი წესით. გამოვთვალოთ იმის ალბათობა, რომ კონკრეტული 2 პიროვნება  $a$  და  $b$  ერთმანეთის გვერდით მოხვდა

**ამოხსნა. პირველი მოდელი.** ვიგულისხმობთ, რომ სკამები დანომრილია. ელემენტარულ ხდომილებებად ავიღოთ  $n$  პიროვნების ყველანაირი გადანაცვლებები, მათი რაოდენობა არის  $n!$ . მათ შორის ხელშემწყობია გადანაცვლებები, რომლებშიც  $a$  და  $b$  ერთმანეთის გვერდით მოხვდება. ასეთი წყვილები შეიძლება დაიწყოს  $(1,2)$  ნომრის სკამებიდან და გაგრძელდეს  $(n-1,n)$  ნომრის სკამებამდე, მათი რაოდენობა არის  $n-1$ . ეს რიცხვი უნდა გამრავლდეს ჯერ 2-ზე (ვინაიდან  $a$  შეიძლება იყოს როგორც  $b$ -ს მარჯვნივ, ასევე მარცხნივ), შემდეგ კიდევ  $(n-2)!$ -ზე (ვინაიდან დანარჩენი პიროვნებები მათ მიერ დაკავებული  $n-2$  სკამზე შეიძლება მოთავსდნენ  $(n-2)!$  სხვადასხვა მიმდევრობით). ამგვარად, სულ  $2(n-1)!$  ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილებაა. მაშასადამე, საძებნი ალბათობა არის  $2/n$ .

**სავარჯიშო 3.** 20 სტუდენტი აბარებს გამოცდას. მაგიდაზე 20 საგამოცდო ბილეთია. ცნობილია, რომ მათ შორის ერთი ბილეთი უფრო ძნელია, ვიდრე დანარჩენები. თუ სტუდენტს უნდა აიცდინოს ძნელი ბილეთის აღება, პირველად ჯობია გასვლა, მეორედ, ..., ბოლოს, თუ სულერთია?

**ამოხსნა.** ცხადია, რომ სტუდენტების მიერ აღებული ბილეთების ნომრების მიმდევრობა ბილეთების ნომრების სიმრავლის შემთხვევითი გადანაცვლებაა. ამიტომ ელემენტარულ ხდომილებათა სიმრავლედ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ  $\{1, 2, \dots, 20\}$  სიმრავლის ყველა გადანაცვლებათა სიმრავლე. მათი რაოდენობა არის  $20!$  და ყველა ეს გადანაცვლება ერთნაირად მოსალოდნელია.  $k$  ნომრად გასული სტუდენტი ძნელ ბილეთს აიღებს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ბილეთების ნომრების შემთხვევით გადანაცვლებაში ძნელი ბილეთის ნომერი  $k$  ადგილზე აღმოჩნდება. მაგრამ იმ გადანაცვლებათა რაოდენობა, რომლებშიც ერთ ადგილზე რომელიმე ერთი ნომერია და ყველა სხვა 19 ადგილზე 19 ნომერი შეგვიძლია ნებისმიერად გადავანაცვლოთ, არის  $19!$  ამიტომ ძნელი ბილეთის აღების ალბათობა არის  $19!/20! = 1/20$  მიუხედავად იმისა, თუ რამდენია  $k$ , ანუ რომელ ადგილზე მოხვდა ძნელი ბილეთი. ამგვარად, ძნელი ბილეთის აღების ალბათობა ერთი და იგივეა ყველა სტუდენტისათვის.

**ამოცანა 4.** ორი პიროვნება შეთანხმდა შეხვედრის შესახებ, წინასწარ დათქმულ ადგილზე და დროზე 12 სთ-დან 13 სთ-მდე. ამასთან პირველი მოსული მეორეს ელოდება 20 წუთის განმავლობაში. რას უდრის მათი შეხვედრის ალბათობა, თუ თითოეული მათგანი ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად ირჩევს თავისი მოსვლის დროს.

**ამოცანა 5.** წრეწირზე შემთხვევით ირჩევენ სამ წერტილს **A, B, C**. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამკუთხედი **ABC** იქნება მახვილკუთხა, ბლაგვკუთხა, მართკუთხა.

**ამოცანა 6.** ერთეული სიგრძის მონაკვეთი შემთხვევით გატეხილია ორ ადგილას. იპოვეთ ალბათობა, იმისა, რომ მიღებული მონაკვეთებით შეიძლება შევადგინოთ სამკუთხედი.

**ამოცანა 7.** ურნაში დევს 12 ბურთი მათ შორის 8 თეთრი და 4 შავი. სამი მოთამაშე A, B, C რიგრიგობით იღებენ ბურთებს. მოგებულია ის ვინც პირველი ამოიღებს თეთრ ბურთს. იპოვეთ თითოეულის მოგების შანსი.

**ამოცანა 8.**  $N$  საგამოცდო საკითხში  $k$  არის ბედნიერი. მოსწავლეები ერთმანეთის მიყოლებით იღებენ საგამოცდო საკითხებს. ვის უფრო მეტი შანსი აქვს მოგების ვინც პირველი მივიდა საკითხის ასაღებად თუ მეორედ ?

**ამოცანა 9. ( მონტი პილის პარადოქსი ).** წარმოიდგინეთ, რომ მონაწილეობთ თამაშში, რომელშიც თქვენ იმყოფებით სამი კარის წინ. წამყვანი, რომლის შესახებაც ცნობილია, რომ ის პატიოსანია, შემთხვევით ათავსებს ერთი კარის უკან ავტომობილს, ხოლო დანარჩენი ორი კარის უკან თითო ველოსიპედს. წამყვანი გეუბნებათ: “თავიდან თქვენ ირჩევთ ერთ კარს, მერე მე გაგიღებთ დარჩენილი ორიდან ერთ კარს, რომლის უკან დგას ველოსიპედი. შემდეგ თქვენ შეგიძლიათ თავიდან გააკეთოთ კარის არჩევანი: ან აირჩიოთ სხვა კარი, ან არ შეცვალოთ პირვანდელი არჩევანი. ამის შემდეგ წამყვანი ალებს თქვენს მიერ საბოლოოდ შერჩეულ კარს და იგებთ იმას, რაც ამ კარის უკანაა”. გაიზრდება თუ არა თქვენი შანსი მოიგოთ ავტომობილი, თუ შეცვლით პირვანდელ არჩევანს?

მადლობა ყურადღებისათვის!!!