III ტური

ამოცანა 1. ვთქვათ x , y, z და t ისეთი დადებითი რიცხვებია, რომ $x+y+z+t \geq 4$. დაამტკიცეთ უტოლობა

$$\frac{1}{x+y+z+t^2}+\frac{1}{x+y+z^2+t}+\frac{1}{x+y^2+z+t}+\frac{1}{x^2+y+z+t} \leq 1.$$

ამოხსნა: კოშის უტოლობის თანახმად გვაქვს,

$$(x+y+z+t^2)(x+y+z+1) \geq (x+y+z+t)^2. \quad (1)$$

ანუ ვღებულობთ, რომ

$$\frac{1}{x+y+z+t^2} \leq \frac{x+y+z+1}{(x+y+z+t)^2}. \quad (2)$$

თუ დასამტკიცებელი უტოლობის მარცხენა მხარის დანარჩენი სამი წევრისთვისაც ჩავწერთ ანალოგიურ უტოლობას და ოთხივე მათგანს შევკრებთ, მივიღებთ

$$\frac{1}{x+y+z+t^2}+\frac{1}{x+y+z^2+t}+\frac{1}{x+y^2+z+t}+\frac{1}{x^2+y+z+t}$$
$$\leq \frac{3(x+y+z+t)+4}{(x+y+z+t)^2} = \frac{3}{x+y+z+t}+\frac{4}{(x+y+z+t)^2} \leq \frac{3}{4}+\frac{4}{16} = 1.$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ამოხსნის ეტაპები

ა) განიხილა კოშის ტიპის უტოლობა მარცხენა მხარის შესაფასებლად და მიიღო (1);

ბ) მიიღო მარცხენა მხარის ერთ-ერთი წევრის „ზუსტი“ შეფასება ზემოდან ანუ (2);

გ) შეკრიბა მიღებული უტოლობები და მიიღო მარცხენა მხარის შეფასება $\frac{3s+4}{s^2}$ ტიპის სიდიდით;

დ) როცა $s \geq 4$, დაადგინა $\frac{3s+4}{s^2}$ სიდიდის მაქსიმუმი და დაასრულა დამტკიცება;

შეფასების სქემა

2 ქ- ა)

3 ქ- ა), ბ)

5ქ- ა) , ბ), გ)

7ქ- ა), ბ), გ), დ)

2. ვთქვათ M მთელი დადებითი რიცხვია. მოცემულია მიმდევრობა $a_0, a_1, a_2, \dots$, სადაც $a_0 = \frac{2M+1}{2}$ და $a_{k+1} = a_k[a_k]$, $k = 0,1,2, \dots$. იპოვეთ M -ის ყველა მნიშვნელობა ისეთი, რომ $a_0, a_1, a_2, \dots$, მიმდევრობის ერთი წევრი მაინც მთელი რიცხვია.

($[x]$ -ით აღნიშნულია უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც არ აღემატება x -ს)

ამოხსნა: განვსაზღვროთ მიმდევრობა $b_k = 2a_k$, $k \geq 0$. მაშინ $b_{k+1} = 2a_{k+1} = 2a_k[a_k] = b_k\left[\frac{b_k}{2}\right]$. ვინაიდან b_0 მთელი რიცხვია, ამიტომ b_k -ც მთელი რიცხვია ყოველი $k \geq 0$.

დავუშვათ, რომ მიმდევრობა $a_0, a_1, a_2, \dots$, არ შეიცავს მთელ წევრს. ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში M შეიძლება იყოს მხოლოდ 1. მართლაც, ყოველი $k \geq 0$ თვის, b_k უნდა იყოს ისეთი კენტი რიცხვი, რომ

$$b_{k+1} = b_k\left[\frac{b_k}{2}\right] = \frac{b_k(b_k-1)}{2}. \qquad (1)$$

ამრიგად ყოველი $k \geq 0$ -თვის,

$$b_{k+1} - 3 = \frac{b_k(b_k-1)}{2} - 3 = \frac{(b_k-3)(b_k+2)}{2} \qquad (2)$$

დავუშვათ, რომ $b_0 - 3 > 0$. მაშინ (2) ტოლობიდან გვაქვს $b_k - 3 > 0$, ყოველი $k \geq 0$. c_k იყოს უდიდესი 2-ის ხარისხი, რომელიც ყოფს $b_k - 3$. ვინაიდან $b_k - 3$ არის ლუწი, ამიტომ c_k არის დადებითი რიცხვი ყოველი $k \geq 0$-თვის.

შევნიშნოთ, რომ $b_k + 2$ არის კენტი. ამრიგად (2) ტოლობიდან გვაქვს $c_{k+1} = c_k - 1$. ე.ი. მთელ დადებით რიცხვთა მიმდევრობა c_0, c_1, c_2 მკაცრად კლებადია, რაც შეუძლებელია. ამრიგად , $b_0 - 3 \leq 0$ რაც ნიშნავს $M = 1$.

როცა $M = 1$ ადვილი შესამოწმებელია, რომ $a_k = \frac{3}{2}$, ყოველი $k \geq 0$. საიდანაც გამოდის, რომ ამოცანის პასუხია $M \geq 2$.

პასუხი: $M \geq 2$

ამოხსნის ეტაპები

ა) განიხილა ახალი მიმდევრობა $b_k = 2a_k$ და შენიშნა, რომ თუ მიმდევრობის არცერთი წევრი მთელი არაა, მაშინ b_k კენტია;

ბ) ჩაწერა (1) ტოლობა;

გ) მიიღო (2);

დ) დაადგინა, რომ თუ მიმდევრობის არცერთი წევრი მთელი არაა, მაშინ $b_0 - 3 \leq 0$;

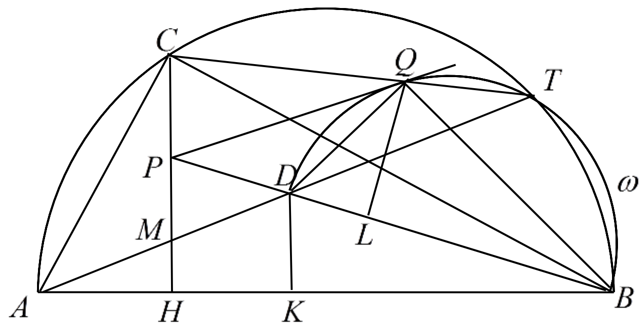
ე) შეამოწმა შემთხვევა როცა $M = 1$ და მიიღო საბოლოო პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ)
3ქ- ა) , ბ), გ)
6ქ- ა), ბ), გ), დ)
7ქ-ა), ბ), გ), დ), ე)

3. ვთქვათ ABC არის მართკუთხა სამკუთხედი C მართი კუთხით. H არის C წერტილიდან AB ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლის ფუძე. D წერტილი შერჩეულია CBH სამკუთხედის შიგნით ისე, რომ CH შუაზე ყოფს AD მონაკვეთს. BD და CH წრფეები იკვეთებიან P წერტილში. ვთქვათ ω არის ნახევარწრეწირი BD დიამეტრით. ω კვეთს CB მონაკვეთს შიგა წერტილში. P წერტილზე გავლებულია ω ნახევარწრეწირის მხები წრფე, რომელიც ეხება მას Q წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ CQ და AD წრფეების გადაკვეთის წერტილი მდებარეობს ω–ზე.

ამოხსნა



ვთქვათ K არის D წერტილის გეგმილი AB ჰიპოტენუზაზე. რადგან $AM = MD$, ამიტომ $AH = HK$. რადგან $PH \parallel DK$, გვექნება $\frac{PD}{PB} = \frac{HK}{HB} = \frac{AH}{HB}$. ვთქვათ L არის Q წერტილის გეგმილი DB–ზე. ვინაიდან $\angle DQB = \angle BLQ = 90^\circ$, გვექნება $\angle PQD = \angle QBP = \angle DQL$. მაშასადამე QD და QB არიან შესაბამისად PQL კუთხის და

მისი გარე კუთხის ბისექტრისები.
ამიტომ
$\frac{PD}{DL} = \frac{PQ}{QL} = \frac{PB}{BL}$. ამრიგად , მიღებული თანაფარდობებიდან გვექნება $\frac{AH}{HB} = \frac{PD}{PB} = \frac{DL}{LB}$.
ამიტომ თუ განვიხილავთ სპირალურ მსგავსებას B ცენტრით, რომელიც A წერტილს ასახავს D წერტილზე, მაშინ H წერტილი აისახება L წერტილზე და AB დიამეტრის მქონე ნახევარწრეწირი აისახება ω ნახევარწრეწირზე. რადგან $CH \perp AB$ და $QL \perp DB$, ამიტომ C აისახება Q–ზე. მაშასადამე ABD და CBQ სამკუთხედები მსგავსია, საიდანაც გვექნება, რომ $\angle ADB = \angle CQB$, რაც ნიშნავს, რომ CQ და AD წრფეების გადაკვეთის T წერტილისთვის $\angle BDT = \angle BQT$. ამრიგად T წერტილი მდებარეობს ω–ზე.

შენიშვნა: დამატებით შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან $\angle BAD = \angle BCQ$, ამიტომ T წერტილი ასევე მდებარეობს AB დიამეტრის მქონე ნახევარწრეწირზე.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ $\frac{PD}{PB}=\frac{HK}{HB}=\frac{AH}{HB}$;

ბ) დაადგინა, რომ $\frac{PD}{DL}=\frac{PQ}{QL}=\frac{PB}{BL}$;

გ) დაადგინა, რომ $\frac{AH}{HB}=\frac{PD}{PB}=\frac{DL}{LB}$;

დ) განიხილა სპირალური მსგავსება B ცენტრით;

ე) დაადგინა, რომ ABD და CBQ სამკუთხედები მსგავსია;

ვ) დაადგინა, რომ $\angle ADB=\angle CQB$;

ზ) დაადგინა, რომ T წერტილი მდებარეობს ω –ზე.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)

2 ქ- ა), ბ)

3ქ- ა) , ბ), გ)

4ქ- ა), ბ), გ), დ)

5ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)

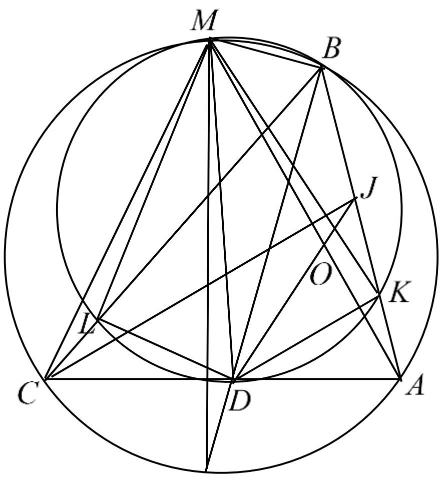
6 ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

IV ტური

4. ვთქვათ ABC არის მახვილკუთხა სამკუთხედი, რომლისთვისაც $AB < BC$. BD არის ABC კუთხის ბისექტრისა, $D \in AC$. M არის ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ABC რკალის შუაწერტილი. BDM სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი AB მონაკვეთს კვეთს K წერტილში, ამასთან $K \neq B$. J წერტილი არის A წერტილის სიმეტრიული K ცენტრის მიმართ. DJ და AM წრფეები იკვეთებიან O წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ J, B, M და O წერტილები მდებარეობენ ერთ წრეწირზე.

ამოხსნა



ვთქვათ BDM სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი BC მონაკვეთს კვეთს L წერტილში, ამასთან $L \neq B$. ვინაიდან $\angle CBD = \angle DBA$, ამიტომ $DL = DK$. გვაქვს
$\angle LMC = \angle CMK - \angle LMK = \angle CMK - \angle LBK =$
$= \angle CMK - \angle CBA = \angle CMK - \angle CMA = \angle AMK$, ასევე
$\angle LCM = \angle BCM = \angle BAM = \angle KAM$ და $MC = MA$,
ამიტომ $\Delta LCM = \Delta KAM$. აქედან კი ვიღებთ, რომ
$CL = AK = KJ$. შემდეგ გვაქვს
$\angle CLD = 180^\circ - \angle BLD = \angle DKB = \angle DKJ$ და
$DL = DK$, ამიტომ $\Delta DCL = \Delta DJK$, საიდანაც
$\angle DCL = \angle DJK = 180^\circ - \angle BJO$. ამრიგად
$\angle BJO + \angle BMO = 180^\circ - \angle DCL + \angle BMA = 180^\circ - \angle BCA + \angle BCA = 180^\circ$, რაც იმას ნიშნავს, რომ J, B, M და O წერტილები მდებარეობენ ერთ წრეწირზე.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ $DL = DK$;
ბ) დაადგინა, რომ $\angle LMC = \angle AMK$;
გ) დაადგინა, რომ $\Delta LCM = \Delta KAM$;
დ) დაადგინა, რომ $\angle CLD = \angle DKJ$;
ე) დაადგინა, რომ $\Delta DCL = \Delta DJK$;

ვ) დაადგინა, რომ $\angle DCL = \angle DJK$;

ზ) დაადგინა, რომ $\angle BJO + \angle BMO = 180^\circ$ და დაასკვნა, რომ J, B, M და O წერტილები მდებარეობენ ერთ წრეწირზე.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)

2 ქ- ა), ბ)

3ქ- ა) , ბ), გ)

4ქ- ა), ბ), გ), დ)

5ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)

6 ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

5. იპოვეთ ყველა $f: Z \to Z$ სახის ფუნქცია, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1 \qquad (1)$$

ყოველი $x, y \in Z$ რიცხვებისთვის. (Z –ით აღნიშნულია ყველა მთელი რიცხვის სიმრავლე).

ამოხსნა

ვთქვათ f არის ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას ყოველი $x, y \in Z$ რიცხვებისთვის. ჩავსვათ განტოლებაში $x = 0$ და $y = f(0)$. მივიღებთ $f(-f(f(0))) = -1$, ანუ $z = -f(f(0))$ აკმაყოფილებს $f(z) = -1$ განტოლებას. ჩავსვათ მოცემულ განტოლებაში $y = z$. მივიღებთ

$$f(x+1) = f(f(x)) \qquad (2)$$

ყოველი $x \in Z$ –ისთვის. მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$f(x - f(y)) = f(x+1) - f(y) - 1. \qquad (3)$$

ახლა (3)–ში ჩავსვათ $y = x$ და გავითვალისწინოთ (2). მივიღებთ

$$f(x+1) - f(x) = f(x - f(x)) + 1 = f(f(x - f(x) - 1)) + 1.$$

(3)–დან ასევე გამომდინარეობს, რომ $f(x - 1 - f(x)) = f(x) - f(x) - 1 = -1$. ამრიგად $f(x+1) - f(x) = f(f(x - f(x) - 1)) + 1 = f(-1) + 1$, ე. ი. $f(x+1) = f(x) + A$, სადაც $A = f(-1) + 1$ რაღაც მთელი რიცხვია. მიღებული ტოლობიდან კი ინდუქციით (ორივე მიმართულებით) მიიღება, რომ $f(x) = Ax + B$ ყოველი $x \in Z$ –ისთვის, სადაც $B = f(0)$. $f(x) = Ax + B$ ჩავსვათ (2)–ში. მივიღებთ $Ax + A + B = A^2x + AB + B$, ყოველი $x \in Z$ –ისთვის. მიღებულში ჩავსვათ $x = 0$ და $x = 1$. გვექნება $A = AB$ და $A^2 = A$, საიდანაც $A = 0$ ან $A = 1$.

როცა $A = 1$, მაშინ $B = 1$ და შესაბამისად $f(x) = x + 1$ ყოველი $x \in Z$ –ისთვის, რაც დადასტურდება (1) განტოლებაში ჩასმით და შემოწმებით. თუ $A = 0$ მაშინ f მუდმივია და (1) განტოლება გვიჩვენებს, რომ $f(x) = -1$.

პასუხი: $f(x) = x + 1$ ყოველი $x \in Z$ –ისთვის ან $f(x) = -1$ ყოველი $x \in Z$ –ისთვის.

ამოხსნის ეტაპები

ა) მიიღო $f(-f(f(0))) = -1$;

ბ) დაადგინა, რომ $f(x+1) = f(f(x))$;

გ) დაადგინა, რომ $f(x+1) = f(x) + A$, სადაც $A = f(-1) + 1$;

დ) დაადგინა, რომ $f(x) = Ax + B$ ყოველი $x \in Z$ −ისთვის,;

ე) დაადგინა, რომ $A = AB$ და $A^2 = A$;

ვ) დაადგინა, რომ $f(x) = x + 1$ და შეამოწმა;

ზ) დაადგინა, რომ $f(x) = -1$ და შეამოწმა;

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)

2 ქ- ა), ბ)

3ქ- ა) , ბ), გ)

4ქ- ა), ბ), გ), დ)

5ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)

6 ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ) ან ა), ბ), გ), დ), ე), ზ)

7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 6. ვთქვათ, A დადებით მთელ რიცხვთა რაიმე სასრული სიმრავლეა. მის დაყოფას ორ A_1და A_2 არაცარიელ თანაუკვეთ ქვესიმრავლედ ($A = A_1 \cup A_2$) ვუწოდოთ *კარგი,* თუ A_1 სიმრავლის ყველა ელემენტის უმცირესი საერთო ჯერადი ტოლია A_2 სიმრავლის ყველა ელემენტის უდიდესი საერთო გამყოფის. განსაზღვრეთ n-ის უმცირესი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც არსებობს დადებითი მთელი რიცხვებისგან შედგენილი n ელემენტიანი სიმრავლე, რომელსაც გააჩნია ზუსტად 2016 კარგი დაყოფა.

შენიშვნა: *შეგახსენებთ, რომ განსაზღვრების თანახმად სიმრავლე შედგება ერთმანეთისაგან განსხვავებული ელემენტებისგან. ამრიგად, n ელემენტიანი სიმრავლე შედგება ზუსტად n ცალი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ელემენტისგან.*

ამოხსნა: ვთქვათ $A = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ სადაც $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. მთელ დადებით რიცხვთა რაიმე სასრული B სიმრავლისათვის შესაბამისად $\operatorname{lcm} B$ და $\gcd B$ აღვნიშნოთ B სიმრავლის ყველა ელემენტის უმცირესი საერთო ჯერადი და უდიდესი საერთო გამყოფი. განვიხილოთ A სიმრავლის რაიმე კარგი დაყოფა (A_1, A_2). განსაზღვრების თანახმად $\operatorname{lcm} A_1 = d = \gcd A_2$ სადაც d, რაიმე მთელი დადებითი რიცხვია. ცხადია ყოველი $a_i \in A_1$ და $a_j \in A_2$, გვაქვს $a_i \le d \le a_j$. ამრიგად $A_1 = \{a_1, a_2, \dots a_k\}$ და $A_2 = \{a_{k+1}, a_{k+2}, \dots a_n\}$ რაიმე k -თვის, $1 \le k < n$. ე.ი. ყოველი კარგი დაყოფა ცალსახად განისაზღვრება a_k ელემენტით, სადაც $1 \le k < n$. დავარქვათ ასეთ a_k ელემენტს *დამყოფი.*

შემოვიღოთ აღნიშვნები $l_k = \operatorname{lcm}(a_1, a_2, \dots a_k)$ და $g_k = \gcd(a_{k+1}, a_{k+2}, \dots a_n)$, როცა $1 \le k \le n-1$. ამრიგად a_k დამყოფია მაშინ როცა $l_k = g_k$.

დავამტკიცოთ შემდეგი წინადადებები:

1. *თუ a_{k-1} და a_k დამყოფებია, სადაც $2 \le k \le n-1$, მაშინ $g_{k-1} = g_k = a_k$.*
   დამტკიცება: ვინაიდან a_{k-1} და a_k დამყოფებია, გვაქვს $l_{k-1} = g_{k-1}$ და $l_{k-1} | a_k$. ამრიგად, $g_k = l_k = \operatorname{lcm}(l_{k-1}, a_k) = a_k$ და $g_{k-1} = \gcd(a_k, g_k) = a_k$ ე.ი. $g_{k-1} = g_k = a_k$.

2. *ყოველი $k = 2,3, \dots, n-2$ -თვის, a_{k-1}, a_k და a_{k+1} ელემენტთაგან ერთი მაინც დამყოფი არაა.*

მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ანუ თუ a_{k-1}, a_k და a_{k+1} სამივე დამყოფია, მაშინ 1- ის გათვალისწინებით გვაქვს ტოლობა $a_{k+1} = g_k = a_k$, რაც ცხადია წინააღმდეგობაა.

3. *a_1 და a_2 არ შეიძლება ერთდროულად დამყოფები იყვნენ, ასევე a_{n-2} და a_{n-1}-დან რომელიმე დამყოფი არაა.*
   მართლაც, თუ a_1 და a_2ორივე დამყოფია, მაშინ 1-ის გამო $a_2 = g_1 = l_1 = \operatorname{lcm}(a_1) = a_1$, წინააღმდეგობა. ანალოგიურად, თუ a_{n-2} და a_{n-1}დამყოფებია, ისევ 1-ის გამო $a_{n-1} = g_{n-1} = \gcd(a_n) = a_n$, წინააღმდეგობა.

ვთქვათ ახლა A არის n -ელემენტიანი სიმრავლე ზუსტად 2016 კარგი დაყოფით. ცხადია, $n \geq 5$. 3 -ის გამო $\{a_1, a_2\}$ და $\{a_{n-2}, a_{n-1}\}$ სიმრავლეებში არსებობს მაქსიმუმ თითო- თითო დამყოფი. 2-ის გამო $\{a_3, a_4, \dots a_{n-3}\}$ სიმრავლეში არის სულ მცირე $\left\lfloor\frac{n-5}{3}\right\rfloor$ არა დამყოფი ელემენტი, ე. ი. სულ გვაქვს არა უმეტეს $(n-1) - 2 - \left\lfloor\frac{n-5}{3}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{2(n-2)}{3}\right\rfloor$ დამყოფი ელემენტი A -ში. ანუ $\left\lfloor\frac{2(n-2)}{3}\right\rfloor \geq 2016$, საიდანაც $n \geq 3025$. ახლა ადვილი საჩვენებელია, რომ $\{6^i, 2\cdot 6^i, 3\cdot 6^i | 0 \leq i \leq 1007\} \cup \{6^{1008}\}$ წარმოადგენს იმ სიმრავლის მაგალითს, რომელიც შედგება 3025 რიცხვისგან და გააჩნია ზუსტად 2016 კარგი დაყოფა. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

პასუხი: 3025

ამოხსნის ეტაპები

ა) შენიშნა, რომ ყოველი კარგი დაყოფა ცალსახად განისაზღვრება a_k ელემენტით;

ბ) დაამტიკცა წინადადება 3;

გ) დაამტიკცა წინადადება 1;

დ) დაამტიკცა წინადადება 2;

ე) მიიღო შეფასება $n \geq 3025$;

ვ) მოიყვანა მაგალითი სიმრავლისა რომელიც შედგება 3025 რიცხვისგან და გააჩნია ზუსტად 2016 კარგი დაყოფა.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)

2 ქ- ა), ბ)

3ქ- ა) , ბ), გ)

5ქ- ა), ბ), გ), დ)

6ქ-ა), ბ), გ), დ), ე)

7ქ-ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)