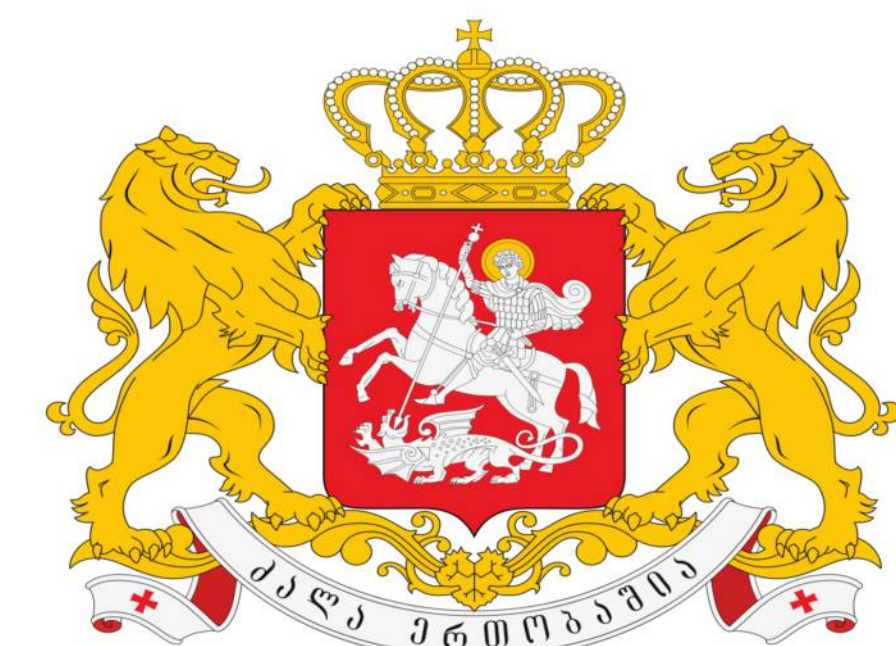




ჰიპოელიფსური განტოლებების ამონახსნების სრული ასიმპტოტური გაშლა

გიორგი ჭკადუა

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ანდრია რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტი



საქართველოს მანათლავისა
და მკვნიერავის საჰინისტრო

ჰელმჰოლცის განტოლება

$$\begin{aligned}(\Delta + k^2)u &= 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \\ (\Delta + k^2)\mathcal{E}(x) &= \delta(x), & P(\xi)E(\xi) = 1, \\ P(\xi) &= k^2 - |\xi|^2, & \mathcal{E}(x) = \frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial r} \pm iku(x) = O(r^{-2}), \quad u(x) = O(r^{-1})$$

A. Sommerfeld Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung, 1912, 309-353.

$$(\Delta + k^2)^2 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

$$P(\xi) = (k^2 - |\xi|^2)^2, \quad \mathcal{E}(x) = \frac{i}{8\pi k} e^{\pm ikr}.$$

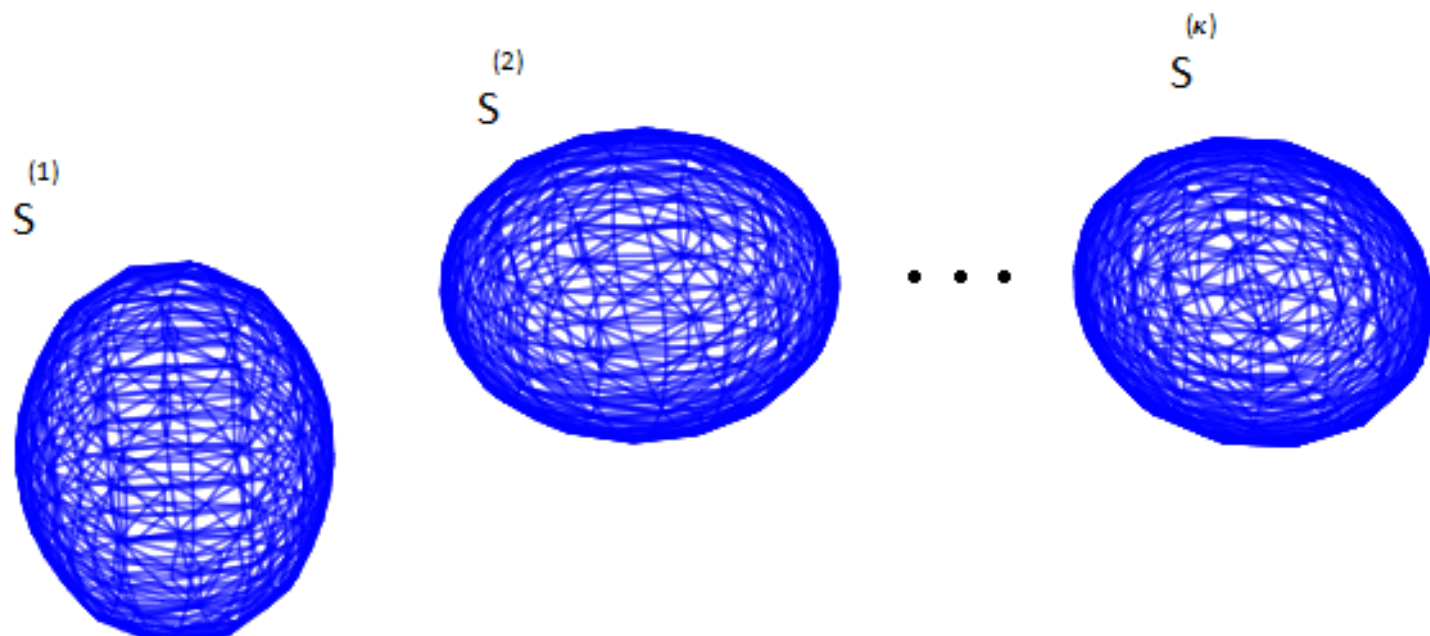
წინა შედეგები

B.R. Vainberg Asymptotic methods in equations of mathematical physics, 1989.

$$P(i\partial_x)u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

- $\nabla_\xi P(\xi) \neq 0$ $P(\xi)$ -ის ნამდვილ ნულებზე.
- $P(\xi)$ -ის ნამდვილი ნულების სიმრავლე შედგება ზედაპირებისგან $S^{(1)}, \dots, S^{(\mathcal{N})}$.
- სრული სიმრუდე $S^{(1)}, \dots, S^{(\mathcal{N})}$ ზედაპირების, არ არის წელი.

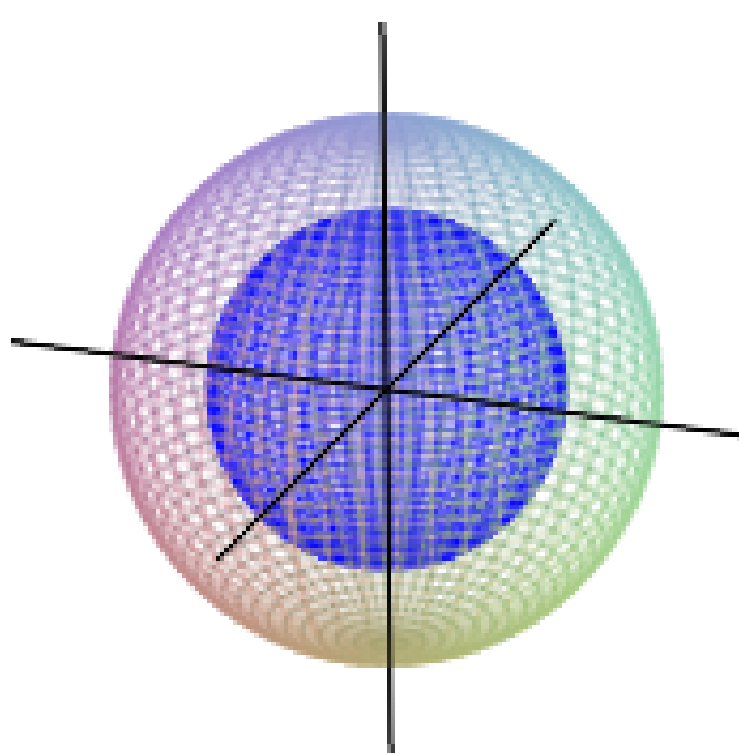
$\nabla_\xi P(\xi) \neq 0$ -ზედაპირებს არ გააჩნიათ საერთო შეხების წერტილი ან საზღვარი.



პირობა 3-დან გამომდინარეობს, რომ ზედაპირები $S^{(1)}, \dots, S^{(\mathcal{N})}$, არიან შეხებად ამოზნექილები.

მაგალითი

$$\begin{aligned}(\Delta + k_1^2)(\Delta + k_2^2)u(x) &= f(x) & \mathbb{R}^3 - \text{ში} \\ P(\xi) &= (k_1^2 - |\xi|^2)(k_2^2 - |\xi|^2), \\ P(\xi) &= 0, & k_2 < k_1,\end{aligned}$$



ასიმპტოტიკა

$$\mathcal{E}(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\mathcal{N}} e^{-i\mu^{(\nu)}(\omega)r} \sum_{p=0}^{\infty} a_{\nu,p}(\omega) r^{\frac{1-n}{2}-p}$$

$\omega = x/r$, არსებობს მხოლოდ ერთი წერტილი $\xi^{(\nu)}(\omega) \in S^{(\nu)}$, $n(\xi^{(\nu)}(\omega)) = \sigma^{(\nu)} \frac{\nabla T(\xi^{(\nu)})}{|\nabla T(\xi^{(\nu)})|}$ $S^{(\nu)}$ -ზე აქვს იგივე მიმართულება როგორც ω .
 $\mu^{(\nu)}(\omega) := (\xi^{(\nu)}(\omega), \omega)$.
ჰელმჰოლცის განტოლების შემთხვევაში $\mu(\omega) = k$.

ჰიპოელიფსური დიფერენციალური განტოლება ჯერადობით

$$(P(i\partial_x))^m u = f \quad \mathbb{R}^n - \text{ში},$$

- $\nabla_\xi P(\xi) \neq 0$ $P(\xi)$ -ის ნამდვილ ნულებზე.
- $P(\xi)$ -ის ნამდვილი ნულების სიმრავლე შედგება ზედაპირებისგან $S^{(\nu)}$, $\nu = \overline{1, \mathcal{N}}$ $n-1$ განზომილების.
- სრული სიმრუდე ზედაპირების $S^{(\nu)}$, $\nu = \overline{1, \mathcal{N}}$ არ არის წელი არც ერთ წერტილში.

განმარტება

განზოგადოებული ფუნქცია $u \in M_m^\sigma(P)$, $m \in \mathbb{N}$ თუ მას გააჩნია შემდეგი თანაბარი ($\omega = x/|x|$) ასიმპტოტური გაშლა როცა $r = |x| \rightarrow \infty$

$$u \sim \sum_{\nu=1}^{\mathcal{N}} e^{-i\mu^{(\nu)}(\omega)r} \left\{ d_0^{(\nu)}(\omega) r^{\frac{1-n}{2}+m-1} + \sum_{q=1}^{\infty} d_q^{(\nu)}(\omega) r^{\frac{1-n}{2}+m-1-q} \right\},$$

სადაც $d_q^{(\nu)} \in C^\infty$, $\nu = \overline{1, \mathcal{N}}$, $q = 1, 2, \dots$.

თეორემა

$P(i\partial_x)$ იყოს ჰიპოელიფსური დიფერენციალური ოპერატორი რომელიც ზედაპირებს პირობებს 1-3, და f იყოს განზოგადოებული ფუნქცია კომპაქტური სუპორტით. მაშინ თუ $j = \overline{1, m}$, $m = 1, 2, 3, \dots$ დიფერენციალურ განტოლებას

$$(P(i\partial_x))^j u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

აქვს ერთადერთი ამონახსნი $u \in M_m^\sigma(P)$ კლასში, რომელიც წარმოადგება

$$u = \mathcal{E}_j * f \quad \mathbb{R}^n - \text{ში},$$

სადაც $\mathcal{E}_j$ ფუნდამენტური ამონახსნი $(P(i\partial_x))^j$ ოპერატორის.

თვისებები

$u \in M_m^\sigma(P)$, ი.ე.

$$u \sim \sum_{\nu=1}^{\mathcal{N}} e^{-i\mu^{(\nu)}(\omega)r} \left\{ d_0^{(\nu)}(\omega) r^{\frac{1-n}{2}+m-1} + \sum_{q=1}^{\infty} d_q^{(\nu)}(\omega) r^{\frac{1-n}{2}+m-1-q} \right\}.$$

$$P(i\partial_x)u \sim \sum_{\nu=1}^{\mathcal{N}} e^{-i\mu^{(\nu)}(\omega)r} i\sigma_\nu(m-1) |\nabla P(\xi^{(\nu)}(\omega))| d_0^{(\nu)}(\omega) r^{\frac{1-n}{2}+m-2} + \sum_{\nu=1}^{\mathcal{N}} e^{-i\mu^{(\nu)}(\omega)r} \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{d}_q^{(\nu)}(\omega) r^{\frac{1-n}{2}+m-2-q}.$$

უფრო ზოგადი ჰიპოელიფსური დიფერენციალური განტოლება

$$\begin{aligned}P(i\partial_x)u &= f & \mathbb{R}^n - \text{ში}, \\ P(i\partial_x) &:= (P_1(i\partial_x))^{m_1} \dots (P_\ell(i\partial_x))^{m_\ell}, \\ P(\xi) &= (P_1(\xi))^{m_1} \dots (P_\ell(\xi))^{m_\ell},\end{aligned}$$

ახალი შედეგები ჰელმჰოლცის განტოლებისთვის

ერთგვაროვანი ჰელმჰოლცის განტოლებას

$$(\Delta + k^2)u = 0 \quad \mathbb{R}^n - \text{ში}$$

გააჩნია მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი M_m -ში, ყველა m .

$u \in M_m$

$$u \sim e^{-ikr} \left\{ d_0(\omega) r^{\frac{1-n}{2}+m-1} + \sum_{q=1}^{\infty} d_q(\omega) r^{\frac{1-n}{2}+m-1-q} \right\}$$

$d_q \in C^\infty$, $q = 1, 2, \dots$.

გამოყენება

დირიხლეს ამოცანას პოლიმეტაჰარმონიული განტოლებისთვის აქვს მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი $\Omega^- := \mathbb{R}^3 \setminus \Omega^+$ -ში

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)^2 u = 0 & \Omega^- - \text{ში}, \\ \{u\}^- = 0 & \text{on } S, \\ \{\partial_n u\}^- = 0 & S - \text{ზე}, \end{cases}$$

$u \in H_{loc}^2 \cap M_2$ ი.ე. M_2 კლასი

$$u \sim e^{-ikr} \left\{ d_0(\omega) + \sum_{q=1}^{\infty} d_q(\omega) r^{-q} \right\}, \quad r \rightarrow \infty.$$

ღია ამოცანები

$$P(\xi) = ((\xi_1 + k)^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - k^2) \times ((\xi_1 - k)^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - k^2), \quad P(\xi) = 0$$

