ამოცანა 1. დავითი იწყებს თამაშს შემდეგი წესით: იღებს ორ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ a და b არანულოვან მთელ რიცხვს და დაფაზე წერს განტოლებას $x^2+ax+b=0$. თუ დაწერილ განტოლებას აქვს ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული $x=u$ და $x=v$ არანულოვანი მთელი ამონახსნი, მაშინ დავითი წაშლის დაწერილ განტოლებას და მის ნაცვლად დაწერს $x^2+ux+v=0$ და $x^2+vx+u=0$ განტოლებებიდან ერთ-ერთს სურვილის მიხედვით. თუ რომელიმე ეტაპზე ახლად დაწერილ განტოლებას არ აღმოაჩნდება ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული არანულოვანი მთელი ამონახსნი, მაშინ თამაში დასრულდება.

დაადგინეთ ყველა შესაძლო საწყისი $(a;b)$ წყვილი, რომლის არჩევის შემთხვევაშიც შესაძლებელი იქნება თამაშის უსასრულოდ გაგრძელება.

ამოხსნა

ვთქვათ $(a;b)$ არის ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული არანულოვანი მთელი რიცხვების წყვილი, რომლის არჩევის შემთხვევაშიც შესაძლებელი იქნება თამაშის უსასრულოდ გაგრძელება. ვთქვათ რაღაც ეტაპზე $x^2+sx+t=0$ განტოლება შეიცვალა $x^2+ux+v=0$ განტოლებით, მაშინ $t=uv$. ვინაიდან u არის არანულოვანი მთელი რიცხვი, ამიტომ $|t|=|uv|\geq|v|$. ვინაიდან $|v|$ არ შეიძლება გახდეს 0-ზე ნაკლები, ამიტომ $|u|\neq1$ პირობით შესაძლებელია დაწერილი განტოლებების შეცვლა მხოლოდ სასრული რაოდენობის ეტაპებით. მაშასადამე თუ თამაში უსასრულოდ გრძელდება, მაშინ რაღაც ეტაპიდან დაწყებული გვექნება $|s|=|u|=1$. ვიეტის ფორმულით $s=-(u+v)$, რაც მიგვიყვანს შემდეგ სამ შემთხვევამდე:

1) თუ $s=1$ და $u=1$, მაშინ $v=-2$ და $x^2+ux+v=x^2+x-2=0$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეა $\{1;-2\}$. მაშინ თამაში გაგრძელდება უსასრულოდ;
2) თუ $s=-1$ და $u=-1$, მაშინ $v=2$ და $x^2+ux+v=x^2-x+2=0$ განტოლებას არ აქვს ამონახსნი. მაშინ თამაში დასრულდება;
3) თუ $\{s;u\}=\{-1;1\}$, მაშინ $v=0$, რაც შეუძლებელია.

ამრიგად ვაჩვენეთ, რომ თამაშის უსასრულოდ გაგრძელებისთვის რაღაც ეტაპზე უნდა მივიღოთ განტოლება $x^2+x-2=0$.
პირიქით, თუ თამაშის რაღაც ეტაპზე დაფაზე წერია $x^2+x-2=0$ განტოლება, მაშინ წინა ეტაპზე დაფაზე უნდა ყოფილიყო დაწერილი $(x-1)(x+2)=x^2+x-2=0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $(a;b)=(1;-2)$.

პასუხი: $(a;b)=(1;-2)$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) აღნიშნა, რომ $|t| = |uv| \geq |v|$;

ბ) აღნიშნა, რომ $|u| \neq 1$ პირობით შესაძლებელია დაწერილი განტოლებების შეცვლა მხოლოდ სასრული რაოდენობის ეტაპებით;

გ) აღნიშნა, რომ თუ თამაში უსასრულოდ გრძელდება, მაშინ რაღაც ეტაპიდან დაწყებული გვექნება $|s| = |u| = 1$;

დ) განიხილა 1), 2), 3) შემთხვევებიდან ერთი მათგანი და გააკეთა დასკვნა;

ე) განიხილა 1), 2), 3) შემთხვევებიდან ორი მათგანი და გააკეთა დასკვნა;

ვ) განიხილა 1), 2), 3) შემთხვევებიდან სამივე და გააკეთა დასკვნა;

ზ) დაადგინა რომ თამაშის უსასრულოდ გაგრძელებისთვის $(a;b) = (1;-2)$.

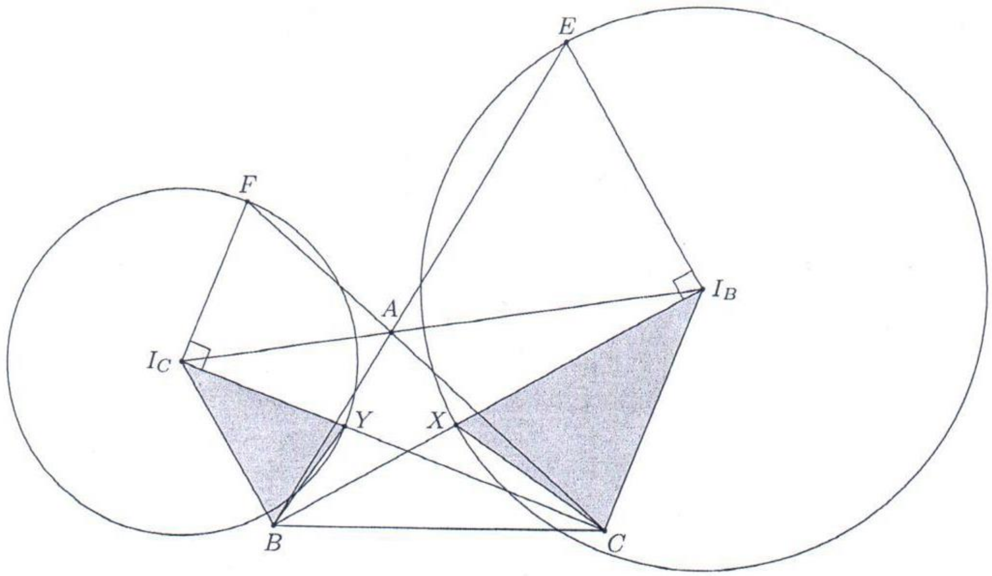
შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ)
3 ქ- ა), ბ), გ)
4 ქ- ა), ბ), გ), დ)
5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 2. მოცემულია ABC მახვილკუთხა სამკუთხედი. ვთქვათ I_B და I_C არიან ABC სამკუთხედის გარეჩახაზული წრეწირების ცენტრები შესაბამისად B და C წვეროების მოპირდაპირედ. ვთქვათ E წერტილი მდებარეობს BA წრფეზე ისე, რომ $\angle EI_BB = 90°$. ვთქვათ F წერტილი მდებარეობს CA წრფეზე ისე, რომ $\angle CI_CF = 90°$. ვთქვათ I_B ცენტრისა და I_BE რადიუსის მქონე წრეწირი I_BB მონაკვეთს კვეთს X წერტილში. ვთქვათ I_C ცენტრისა და I_CF რადიუსის მქონე წრეწირი I_CC მონაკვეთს კვეთს Y წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ BY წრფე მართობულია CX წრფის.

შენიშვნა: ABC სამკუთხედის გარეჩახაზული წრეწირი B წვეროს მოპირდაპირედ ეწოდება იმ წრეწირს, რომელიც ეხება AC გვერდს, BA სხივს BA მონაკვეთის გარეთ და BC სხივს BC მონაკვეთის გარეთ.

ამოხსნა



ვინაიდან $\angle I_BBI_C = \angle I_BCI_C = 90°$, ამიტომ I_CI_BCB ციკლურია, საიდანაც გვაქვს $\angle BI_CY = \angle XI_BC$. შევნიშნოთ, რომ I_B, A, I_C წერტილები ერთ წრფეზეა და $I_CB \parallel EI_B$, ამიტომ ΔBI_CA მსგავსია ΔEI_BA, ანალოგიურად ΔI_CFA მსგავსია ΔI_BCA.

შესაბამისად გვაქვს $\frac{BI_C}{XI_B} = \frac{BI_C}{EI_B} = \frac{I_CA}{I_BA} = \frac{I_CF}{I_BC} = \frac{I_CY}{I_BC}$. ამრიგად მივიღეთ $\frac{BI_C}{XI_B} = \frac{I_CY}{I_BC}$, რაც $\angle BI_CY = \angle XI_BC$ ტოლობასთან ერთად გვაძლევს, რომ ΔBI_CY და ΔXI_BC მსგავსებია. აქედან კი იმის გათვალისწინებით, რომ $I_CB \perp XI_B$ და $I_CY \perp CI_B$, ვიღებთ, რომ $BY \perp CX$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ $I_C I_B CB$ ციკლურია;

ბ) დაადგინა, რომ $\angle BI_C Y = \angle XI_B C$;

გ) შენიშნა, რომ I_B, A, I_C წერტილები ერთ წრფეზეა;

დ) დაადგინა, რომ $\Delta BI_C A$ მსგავსია $\Delta EI_B A$, ანალოგიურად $\Delta I_C FA$ მსგავსია $\Delta I_B CA$;

ე) დაადგინა, რომ $\frac{BI_C}{XI_B} = \frac{I_C Y}{I_B C}$;

ვ) დაადგინა, რომ $\Delta BI_C Y$ და $\Delta XI_B C$ მსგავსებია;

ზ) დაადგინა, რომ $BY \perp CX$.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა) ან გ)

2 ქ- ა), ბ) ან ა), გ)

3 ქ- ა), ბ), გ)

4 ქ- ა), ბ), გ), დ)

5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)

6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 3. ვთქვათ, $n \geq 3$ მთელი რიცხვია. მოცემულია n სამოვრისგან შემდგარი ერთი რიგი; ეს სამოვრები მარცხნიდან მარჯვნივ დანომრილია რიცხვებით $1,2,\ldots,n$. კენგურუ სკიპი ამ სამოვრებში შემდეგი წესით მოვს.

თუ სკიპი იმყოფება სამოვარში, რომლის ნომერია k, მაშინ იგი აკეთებს k ნახტომს, და ყოველი ნახტომისას მეზობელ სამოვარში გადადის. ამ k ნახტომიდან პირველი ყოველთვის მარჯვნივ არის მიმართული, გარდა იმ შემთხვევისა, როცა სკიპი იმყოფება სამოვარში ნომრით n; ამ შემთხვევაში პირველი ნახტომი მარცხნივ სრულდება. შემდეგი $k-1$ ნახტომიდან თითოეული იმავე მიმართულებით კეთდება, რა მიმართულებითაც წინა ნახტომი, გარდა იმ შემთხვევისა, როცა სკიპი აღმოჩნდება სამოვარში, რომლის ნომერია 1 ან n; ასეთ დროს იგი ნახტომის მიმართულებას ცვლის. სკიპი მოვს იმ სამოვარში, რომელშიც k ნახტომის შემდეგ აღმოჩნდება. მაგალითად, თუ $n = 8$ და სკიპი იწყებს სამოვრიდან ნომრით 3, მაშინ შემდეგი ოთხი სამოვარი, რომლებშიც იგი მომოვს, არის

$$6,\ 4,\ 8,\ 2.$$

სკიპი ამ წესით უსასრულოდ აგრძელებს ძოვას. სამოვარს ვუწოდოთ *კარგი,* თუ სკიპი მას აუცილებლად ოდესმე ესტუმრება, განურჩევლად იმისა, თავდაპირველად რომელი სამოვრიდან დაიწყებს.
განსაზღვრეთ ყველა $n \geq 3$, რომლისთვისაც არსებობს ზუსტად ერთი კარგი სამოვარი.

ამოხსნა

ვიტყვით, რომ n არის *კარგი რიცხვი,* თუ ზუსტად ერთი კარგი სამოვარი არსებობს.
დავუშვათ, სკიპი ძოვს სამოვარში ნომრით k. მაშინ:

1. თუ $k \leq \frac{n}{2}$, იგი k ნაბიჯით მარჯვნივ მიდის და ამიტომ აღმოჩნდება სამოვარში ნომრით $2k$;
2. თუ $\frac{n}{2} < k \leq n-1$, იგი ჯერ $n-k$ ნაბიჯით მარჯვნივ მიდის, შემდეგ კი $k-(n-k)=2k-n$ ნაბიჯით მარცხნივ ბრუნდება, ამიტომ ბოლოს აღმოჩნდება სამოვარში ნომრით
$$n-(2k-n)=2(n-k);$$
3. თუ სკიპი საමოვარშია ნომრით n, მაშინ იგი $n-1$ ნაბიჯით მარცხნივ მიდის და შემდეგ ერთი ნაბიჯით მარჯვნივ ბრუნდება; ამიტომ ბოლოს აღმოჩნდება სამოვარში ნომრით 2.

ამგვარად, თუ $f:\{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ აღნიშნავს ფუნქციას, რომელიც გვიჩვენებს, თუ სად მოძოვს სკიპი k-ურ სამოვარზე ძოვის შემდეგ, მაშინ
$$f(k)=\begin{cases} 2k, & \text{თუ } k \leq \dfrac{n}{2}, \\ 2(n-k), & \text{თუ } \dfrac{n}{2} < k \leq n-1, \\ 2, & \text{თუ } k=n. \end{cases}$$
თუ სკიპი იწყებს ძოვას სამოვრიდან ნომრით a, მაშინ ის მოძოვს შემდეგ სამოვრებზე:
$$a,\ f(a),\ f^2(a), \ldots$$
ეს მიმდევრობა არის a-ს ორბიტა f ფუნქციის მიმართ.
რადგან შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლე სასრულია, ყოველი ასეთი ორბიტა საბოლოოდ პერიოდული ხდება.
აქედან ვღებულობთ:

- კარგი სამოვარი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა f-ს აქვს ერთადერთი პერიოდული ორბიტა;
- თუ f-ს ერთადერთი პერიოდული ორბიტა აქვს, მაშინ ამ ორბიტაზე მდებარე ყოველი სამოვარი კარგი იქნება;
- მაშასადამე, ზუსტად ერთი კარგი სამოვარი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს ერთადერთი პერიოდული ორბიტა სინამდვილეში ერთი ფიქსირებული წერტილისგან შედგება.

ამიტომ $n \geq 3$ კარგი რიცხვია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა f-ს ზუსტად ერთი პერიოდული წერტილი აქვს.

ლემა 1. დავუშვათ,

$$n = 2^s x,$$

სადაც x კენტია, და ავიღოთ $k < n$. თუ

$$2^t \mid k,$$

სადაც $t \leq s$, მაშინ

$$2^{t+1} \mid f(k)$$

დამტკიცება: ვთქვათ $k = 2^t y$
რომელიმე მთელი y-სთვის.
თუ $k \leq \frac{n}{2}$, მაშინ

$$f(k) = 2k = 2^{t+1} y,$$

ასე რომ, 2^{t+1} ჰყოფს $f(k)$-ს.
თუ $k > \frac{n}{2}$. მაშინ

$$f(k) = 2(n-k) = 2(2^s x - 2^t y) = 2^{t+1}(2^{s-t} x - y),$$

ამიტომ ამ შემთხვევაშიც 2^{t+1} ჰყოფს $f(k)$-ს. ლემა დამტკიცებულია.
ლემა 2. ფუნქციას f აქვს ფიქსირებული წერტილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $3 \mid n$. ამ შემთხვევაში ეს ფიქსირებული წერტილი ერთადერთია და ტოლია

$$q = \frac{2n}{3}.$$

დამტკიცება: დავუშვათ, q არის f-ის ფიქსირებული წერტილი. მაშინ $q > \frac{n}{2}$, რადგან თუ $q \leq \frac{n}{2}$, მივიღებდით

$$f(q) = 2q \neq q.$$

აგრეთვე $q \neq n$, რადგან

$$f(n) = 2 \neq n.$$

ამრიგად,

$$\frac{n}{2} < q \leq n - 1,$$

და ამიტომ

$$f(q) = 2(n-q) = q.$$

აქედან მივიღებთ

$$2n - 2q = q,$$

ანუ

$$q = \frac{2n}{3}.$$

ამრიგად, აუცილებელია, რომ 3 ჰყოფდეს n-ს, და ასეთი ფიქსირებული წერტილი ერთადერთია.
პირიქით, თუ $n = 3m$, მაშინ

$$q = \frac{2n}{3} = 2m,$$

და მართლაც $f(q) = q$.

ამრიგად გვაქვს $3 \mid n$ და $q = \frac{2n}{3}$.

ლემა 3. თუ $n = 3 \cdot 2^s$, მაშინ ყოველი a -ს ორბიტა, სადაც $1 \le a \le n$, შეიცავს q-ს. მაშასადამე, n კარგი რიცხვია.
დამტკიცება: ვთქვათ $a = 2^t y$, სადაც y კენტია და $t \le s+1$, რადგან $a < 3 \cdot 2^s$.
თუ $t \le s$, მაშინ ლემა 1-დან მივიღებთ, რომ $f(a)$ იყოფა 2^{t+1}-ზე. ამავე ლემის განმეორებითი გამოყენებით ვღებულობთ, რომ a-ს რომელიღაც იტერაცია ტოლია

$$a' = 2^s z,$$

სადაც $z \in \{1,2,3\}$.
ახლა განვიხილოთ შესაძლო შემთხვევები:
ცალკე აღვნიშნოთ შემთხვევა $t = s+1$: მაშინ $a = 2^{s+1} = q$, ამიტომ ამ შემთხვევაში ორბიტა უკვე შეიცავს q-ს და დასამტკიცებელი ცხადია.

- თუ $z = 1$, მაშინ

$$a' = 2^s = \frac{q}{2},$$

და მომდევნო გადასვლა უკვე გვაძლევს q-ს;

- თუ $z = 2$, მაშინ

$$a' = 2^{s+1} = q;$$

- თუ $z = 3$, მაშინ

$$a' = 3 \cdot 2^s = n.$$

ამ შემთხვევაში

$$f(a') = f(n) = 2,$$

და შემდეგ

$$f^s(2) = 2^{s+1} = q.$$

ყველა შემთხვევაში ორბიტა საბოლოოდ ხვდება q-ში. ამიტომ ყოველი საწყისი წერტილი ერთსა და იმავე ფიქსირებულ წერტილში მიდის, ანუ n კარგი რიცხვია.

ლემა 4. თუ n არ არის $3 \cdot 2^s$ სახის, მაშინ არსებობს f-ის ისეთი ორბიტა, რომელიც არ შეიცავს q-ს. მაშასადამე, n არ არის კარგი რიცხვი.
დამტკიცება: განვიხილოთ ორი შემთხვევა. თუ $3 \nmid n$, მაშინ ლემა 2-ის თანახმად f-ს ფიქსირებული წერტილი არ აქვს; მაშასადამე, n კარგი ვერ იქნება. ახლა დავუშვათ, რომ $3|n$, მაგრამ $n \neq 3 \cdot 2^s$.
ვთქვათ $n = 3 \cdot 2^s x$, სადაც $x > 1$ კენტია. მაშინ $q = 2^{s+1}x$.
თუ

$$f(k) = q,$$

მაშინ ან

$$2k = q,$$

და ამიტომ

$$k = \frac{q}{2} = 2^s x,$$

ან

$$2(n-k) = q,$$

და ამიტომ

$$k = n - \frac{q}{2} = q.$$

ამრიგად, თუ $a \neq q$, მაშინ a-ს ორბიტა შეიცავს q-ს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შეიცავს $\frac{q}{2} = 2^s x$-ს. ახლა ავიღოთ

$$a = 2^{s+1} < n.$$

ლემა 1-ის მიხედვით, a-ს ყოველი იტერაცია იყოფა 2^{s+1}-ზე. მაშასადამე, მისი ორბიტა ვერასოდეს შეიცავს $\frac{q}{2}$-ს და, შესაბამისად, ვერც q-ს.

ლემა 4-ის მეორე დამტკიცება: თუ n იყოფა 3-ზე, მაგრამ არ არის $3 \cdot 2^s$ სახის, q-ს აქვს კენტი მარტივი გამყოფი p. ავიღოთ ისეთი $k \in \{1,2,\dots,n\}$, რომ $p \nmid k$. მაშინ $k \neq n$, რადგან $p \mid n$.

ამიტომ

$$f(k) = 2k \quad \text{ან} \quad f(k) = 2n - 2k.$$

რაკი $p \mid n$, მაგრამ $p \nmid 2$ და $p \nmid k$, მივიღებთ, რომ $p \nmid f(k)$.

მაგრამ $p \mid q$. მაშასადამე, მაგალითად, 1-ის ორბიტა არ შეიცავს q-ს, საიდანაც ვღებულობთ, რომ n ვერ იქნება კარგი რიცხვი.

პასუხი: ზუსტად ერთი კარგი საძოვარი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$n = 3 \cdot 2^s$$

სადაც s, არაუარყოფითი მთელი რიცხვია.

ამოხსნის ეტაპები

ა) შემოიღო ფუნქცია f და ჩაწერა მისი სახე;
ბ) შენიშნა, რომ ზუსტად ერთი კარგი საძოვრის არსებობა ეკვივალენტურია იმისა, რომ ამ ფუნქციას ზუსტად ერთი პერიოდული წერტილი ჰქონდეს;
გ) ჩამოაყალიბა და დაამტკიცა ლემა 1;
დ) დაადგინა ფიქსირებული წერტილის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა და დაამტკიცა ლემა 2;
ე) აჩვენა, რომ თუ $n = 3 \cdot 2^s$ მაშინ n კარგი რიცხვია, ანუ დაამტკიცა ლემა 3;
ვ) აჩვენა, რომ თუ რიცხვი $3 \cdot 2^s$ სახის არ არის, მაშინ არსებობს ისეთი ორბიტა, რომელიც არ შეიცავს q -ს და დაამტკიცა ლემა 4;
ზ) დაასკვნა, რომ ზუსტად ერთი კარგი საძოვარი არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $n = 3 \cdot 2^s$ სადაც s არაუარყოფითი მთელი რიცხვია.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)

2 ქ- ა), ბ)
3 ქ- ა), ბ), გ)
4 ქ- ა), ბ), გ), დ)
5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 4. მოცემულია $n \times n$ ზომის ცხრილი. მისი სტრიქონები ქვემოდან ზემოთ, ხოლო სვეტები მარცხნიდან მარჯვნივ დანომრილია რიცხვებით $1,2,\ldots,n$. ყოველი $1 \leq i,j \leq n$-ისთვის (i,j) უჯრაში მოთავსებულია $\gcd(i,j)$ ცალი ფოთოლი, სადაც $\gcd(i,j)$ აღნიშნავს რიცხვების i-ისა და j-ის უდიდეს საერთო გამყოფს.

კოალა იწყებს მოძრაობას უჯრიდან $(1,1)$ და უნდა მოხვდეს უჯრაზე (n,n). იგი ყოველ ნაბიჯზე გადადის ან ერთი უჯრით ზემოთ, ან ერთი უჯრით მარჯვნივ. კოალა ჭამს ყველა ფოთოლს იმ უჯრებში, რომლებზეც გაივლის, მათ შორის საწყის და საბოლოო უჯრებშიც.
იპოვეთ ფოთლების მაქსიმალური რაოდენობა, რომლის შეჭმაც კოალას შეუძლია.

ამოხსნა

განვიხილოთ შემდეგი გზა:

$$(1,1) \to (2,1) \to (2,2) \to (3,2) \to (3,3) \to \cdots \to (n,n-1) \to (n,n).$$

ეს გზა გაივლის ყველა დიაგონალურ უჯრას (k,k), სადაც $1 \leq k \leq n$, და ასევე ყველა უჯრას $(k+1,k)$, სადაც $1 \leq k \leq n-1$.
დიაგონალურ უჯრებში ფოთლების რაოდენობაა

$$\gcd(k,k) = k,$$

ამიტომ ამ უჯრებიდან კოალა შეჭამს

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ფოთოლს.
მეორე მხრივ,

$$\gcd(k+1,k) = 1$$

ყველა $1 \leq k \leq n-1$-ისთვის, რადგან მომდევნო მთელი რიცხვები ურთიერთმარტივია. ამიტომ დიაგონალის გვერდით მდებარე ამ $n-1$ უჯრიდან კოალა კიდევ $n-1$ ფოთოლს შეჭამს.
ამრიგად, ამ გზაზე შეჭმული ფოთლების საერთო რაოდენობაა

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n-1) = \frac{n^2+3n-2}{2}.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ არცერთ გზაზე შეჭმული ფოთლების საერთო რაოდენობა ზემოთ მოცემულ რიცხვზე მეტი ვერ იქნება.
განვიხილოთ ერთი და იმავე სვეტში მდებარე ორი მეზობელი უჯრა (i,j) და $(i+1,j)$.
ვთქვათ $a = \gcd(i,j)$ და $b = \gcd(i+1,j)$.
რადგან i და $i+1$ ურთიერთმარტივია, ასევე ურთიერთმარტივია a და b. ამავე დროს $a \mid j$ და $b \mid j$, ამიტომ $ab \mid j$ და, კერძოდ,

$$ab \leq j.$$

აქედან მივიღებთ

$$b \leq \frac{j}{a}.$$

ამიტომ

$$a + b \leq a + \frac{j}{a}.$$

ახლა, რადგან $1 \leq a \leq j$, გვაქვს

$$a + \frac{j}{a} \leq j + 1$$

და ტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $a = 1$ ან $a = j$. მართლაც, ეს უტოლობა ტოლფასია შემდეგი უტოლობის

$$a^2 - (j+1)a + j \leq 0,$$

ანუ

$$(a-1)(a-j) \leq 0.$$

ამრიგად,

$$\gcd(i,j) + \gcd(i+1,j) \leq j + 1.$$

ანალოგიურად, ერთი და იმავე მწკრივის მეზობელი უჯრებისთვის (i,j) და $(i,j+1)$ მივიღებთ

$$\gcd(i,j) + \gcd(i,j+1) \leq i + 1.$$

ახლა დავუშვათ, რომ კოალას მიერ არჩეული გზა მიმდევრობით სტუმრობს უჯრებს

$$v_1 = (1,1),\ v_2,\ \dots,\ v_{2n-1} = (n,n),$$

და თუ $v_t = (i_t, j_t)$, მაშინ დავწეროთ

$$g_t = \gcd(i_t, j_t).$$

ასევე განვსაზღვროთ ფუნქცია

$$E(i,j) = ij.$$

თუ v_{t+1} მიიღება v_t-დან ერთი ნაბიჯით ზემოთ, მაშინ

$$E(v_{t+1}) - E(v_t) = (i_t + 1)j_t - i_t j_t = j_t,$$

და წინა შეფასებიდან მივიღებთ

$$g_t + g_{t+1} \leq j_t + 1 = E(v_{t+1}) - E(v_t) + 1.$$

თუ v_{t+1} მიიღება v_t-დან ერთი ნაბიჯით მარჯვნივ, მაშინ

$$E(v_{t+1}) - E(v_t) = i_t(j_t + 1) - i_t j_t = i_t,$$

და ამიტომ კვლავ გვაქვს

$$g_t + g_{t+1} \leq E(v_{t+1}) - E(v_t) + 1.$$

ესე იგი ყველა $t = 1,2,\dots,2n-2$-თვის მართებულია შეფასება

$$g_t + g_{t+1} \leq E(v_{t+1}) - E(v_t) + 1.$$

ახლა განვიხილოთ

$$\sum_{t=1}^{2n-1} g_t = \frac{g_1 + g_{2n-1}}{2} + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{2n-2}(g_t + g_{t+1}).$$

რადგან $g_1 = \gcd(1,1) = 1$ და $g_{2n-1} = \gcd(n,n) = n$, მივიღებთ

$$\sum_{t=1}^{2n-1} g_t \leq \frac{1+n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{2n-2}(E(v_{t+1}) - E(v_t) + 1).$$

შიდა ჯამი ტელესკოპურია, ამიტომ

$$\sum_{t=1}^{2n-2}\big(E(v_{t+1}) - E(v_t)\big) = E(v_{2n-1}) - E(v_1) = n^2 - 1.$$

ამასთან, წევრი 1 ჯამში $2n-2$-ჯერ ჩნდება. მაშასადამე,

$$\sum_{t=1}^{2n-1} g_t \leq \frac{1+n}{2} + \frac{1}{2}\left((n^2-1)+(2n-2)\right) = \frac{n^2+3n-2}{2}.$$

ეს ნიშნავს, რომ ვერც ერთი გზა ვერ გასცდება რიცხვს $\frac{n^2+3n-2}{2}$. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

პასუხი: კოალას შეუძლია მაქსიმუმ $\frac{n^2+3n-2}{2}$ ფოთლის შეჭმა.

ამოხსნის ეტაპები

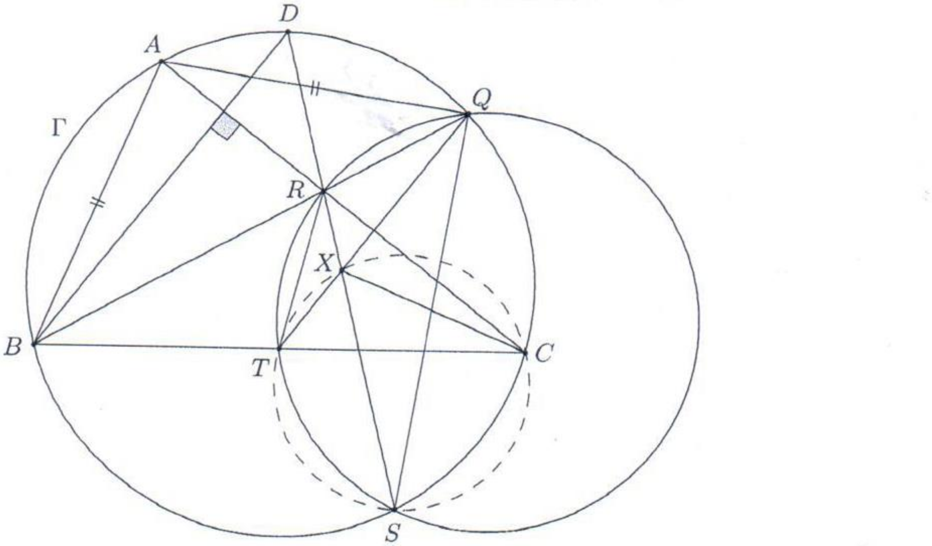
ა) შეარჩია კონკრეტული გზა, რომელიც გადის მთავარ დიაგონალზე და დიაგონალის გვერდით მდებარე უჯრებზე;
ბ) დაითვალა ამ გზაზე მიღებული ფოთლების რაოდენობა და მიიღო ქვედა ზღვარი;
გ) განიხილა ერთ სვეტში ან ერთ მწკრივში მდებარე მეზობელი უჯრები და მიიღო შეფასებები $\gcd(i,j)+\gcd(i+1,j) \leq j+1$ და $\gcd(i,j)+\gcd(i,j+1) \leq i+1$;
დ) შემოიღო დამხმარე ფუნქცია $E(i,j)$, რის მეშვეობითაც ყოველი ორი მეზობელი უჯრისთვის მიიღო ფოთლების რაოდენობის ერთიანი შეფასება;
ე) მთლიან გზაზე ფოთლების საერთო რაოდენობა გადაწერა შემდეგნაირად $\sum_{t=1}^{2n-1} g_t = \frac{g_1+g_{2n-1}}{2} + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{2n-2}(g_t+g_{t+1})$;
ვ) წინა პუნქტში მიღებული ტოლობა შეაფასა ზემოდან, ანუ მიიღო $\sum_{t=1}^{2n-1} g_t \leq \frac{1+n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{2n-2}(E(v_{t+1})-E(v_t)+1)$;
ზ) ტელესკოპური შეკრებით მიიღო ზედა ზღვარი და აღნიშნა, რომ იგი ემთხვევა ბ)-ში ნაპოვნ ქვედა ზღვარს, რითაც მიიღო პასუხი;

შეფასების სქემა

1 ქულა — ა)
2 ქულა — ა), ბ)
3 ქულა — ა), ბ), გ)
4 ქულა — ა), ბ), გ), დ)
5 ქულა — ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქულა — ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქულა — ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 5. მოცემულია ABC მახვილკუთხა სამკუთხედი და $AB < AC$. ვთქვათ Γ არის ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი. B წერტილიდან AC გვერდისადმი მართობულად გავლებული წრფე Γ წრეწირს მეორედ კვეთს $D \neq B$ წერტილში. Q წერტილი მდებარეობს Γ წრეწირზე ისე, რომ $Q \neq B$ და $AB = AQ$. BQ და AC წრფეები იკვეთებიან R წერტილში. DR წრფე Γ წრეწირს მეორედ კვეთს $S \neq D$ წერტილში. BC მონაკვეთი QRS სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირს კვეთს T წერტილში. TQ და RS წრფეები იკვეთებიან X წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ CX წრფე მართობულია AB წრფის.

ამოხსნა



ვთქვათ T' არის Q წერტილის სიმეტრიული CR წრფის მიმართ. მაშინ $RQ = RT'$ და$BD \parallel T'Q$. ამიტომ $\angle QSR = \angle QBD = \angle RQT' = \angle QT'R$, ამიტომ $RQST'$ არის ციკლური. ვინაიდან $\angle RCB = \angle ACB = \angle ACQ = \angle RCQ = \angle RCT'$, ამიტომ T' წერტილი მდებარეობს BC მონაკვეთზე, ე.ი. $T' = T$.

ვინაიდან $BD \parallel TQ$ და $DCSB$ ციკლურია, ამიტომ $\angle CTX = \angle CBD = \angle CSX$, მაშასადამე $XCST$ ასევე ციკლურია. მაშინ $\angle XCT = \angle XST$. ვინაიდან $RQST$ ციკლურია, ამიტომ $\angle XST = \angle RQT$. ვინაიდან BQT სამკუთხედზე შემოიხაზება A ცენტრის მქონე წრეწირი, ამიტომ $\angle RQT = \angle BQT = \frac{1}{2}\angle BAT = 90° - \angle TBA$. ამრიგად $\angle XCT = 90° - \angle CBA$, რაც გვაძლევს, რომ $CX \perp AB$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) განიხილა T', რომელიც არის Q წერტილის სიმეტრიული CR წრფის მიმართ;
ბ) დაადგინა, რომ $RQST'$ არის ციკლური;
გ) დაადგინა, რომ $T' = T$;
დ) დაადგინა, რომ $XCST$ ციკლურია;
ე) დაადგინა, რომ $\angle XCT = \angle RQT$;
ვ) დაადგინა, რომ $\angle RQT = 90° - \angle TBA$.
ზ) დაადგინა, რომ $CX \perp AB$.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ)
3 ქ- ა), ბ), გ)
4 ქ- ა), ბ), გ), დ)
5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 6. ერთ რიგში დალაგებულია 2026 თეთრი და 2026 შავი ბურთი. *ბალანსირებული მონაკვეთი* ეწოდება ბურთების არაცარიელ მომიჯნავე მონაკვეთს, რომელშიც თეთრი და შავი ბურთების რაოდენობები ერთმანეთის ტოლია. *ბალანსირებული ამოღება* არის შემდეგი მოქმედება: ვირჩევთ ბალანსირებულ მონაკვეთს S და რიგიდან ამოვიღებთ S-ში არსებულ ყველა ბურთს, ხოლო მის მარჯვნივ მდებარე ბურთებს მარცხნივ გადავწევთ ისე, რომ დარჩენილი ბურთები კვლავ ერთ უწყვეტ რიგად დალაგდეს.
იპოვეთ უმცირესი დადებითი მთელი რიცხვი N, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისება: ბურთების ყოველი განლაგებისთვის და ყოველი მთელი k-სთვის, სადაც $0 \leq k \leq 2026$, არსებობს არაუმეტეს N ბალანსირებული ამოღების ისეთი მიმდევრობა, რომლის შემდეგაც რიგში ზუსტად $2k$ ბურთი დარჩება.

ამოხსნა

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ $N=1$ საკმარისი არ არის. ავიღოთ $k=1$ და განვიხილოთ ასეთი განლაგება: ჯერ დგას ორი თეთრი ბურთი, შემდეგ — 2026 შავი ბურთი, ბოლოს კი - 2024 თეთრი ბურთი. სქემატურად ეს ასე გამოიყურება:

$$\circ \circ \bullet \bullet \bullet \cdots \bullet \bullet \circ \circ \cdots \circ \circ$$

თუ ერთი ბალანსირებული ამოღებით უნდა დავტოვოთ ზუსტად 2 ბურთი, მაშინ უნდა ამოვიღოთ ერთი მომიჯნავე მონაკვეთი, რომლის სიგრძეა 4050. ასეთი მონაკვეთი აუცილებლად შეიცავს ყველა 2026 შავ ბურთს, მაგრამ მხოლოდ 2024 თეთრ ბურთს. მაშასადამე, იგი ბალანსირებული ვერ იქნება. ამიტომ ერთი ამოღება საკმარისი არ არის, ანუ

$$N \geq 2.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $N=2$ ყოველთვის საკმარისია.

მინიმალური ბალანსირებული მონაკვეთი ვუწოდოთ ისეთ ბალანსირებულ მონაკვეთს, რომელიც არ წარმოადგენს ორი ერთმანეთის მომდევნო ბალანსირებული მონაკვეთის გაერთიანებას. დავამტკიცოთ შემდეგი

ლემა: განვიხილოთ მინიმალური ბალანსირებული მონაკვეთი S, რომელიც შედგება $2m$ ბურთისგან. მაშინ ყოველი მთელი l-სთვის, სადაც $1 \leq l \leq m$, მონაკვეთის შიგნით არსებობს $2l$ სიგრძის ბალანსირებული მონაკვეთი.

დამტკიცება: ყოველი მთელი i-სთვის, სადაც $0 \leq i \leq 2m$, a_i-ით აღვნიშნოთ სხვაობა პირველ i ბურთში შავი ბურთების რაოდენობასა და თეთრი ბურთების რაოდენობას შორის. მაშინ გვექნება

$$a_{i+1} = a_i \pm 1 \qquad (0 \leq i \leq 2m-1).$$

რადგან S მინიმალური ბალანსირებული მონაკვეთია ამიტომ $a_i \neq 0$, როცა $1 \leq i \leq 2m-1$. ამიტომ რიცხვები $a_1, a_2, \ldots, a_{2m-1}$ ან ყველა დადებითია, ან ყველა უარყოფითი.

ახლა ყოველი მთელი i-სთვის, სადაც $0 \leq i \leq 2(m-l)$, b_i იყოს შავი ბურთების რაოდენობა იმ მონაკვეთში, რომელიც იწყება $(i+1)$-ე ბურთით და მთავრდება $(i+2l)$-ე ბურთით. მაშინ

$$b_{i+1} - b_i \in \{-1,0,1\} \qquad (0 \leq i \leq 2(m-l)-1).$$

მარტივად ვღებულობთ, რომ

$$b_0 = l + \frac{a_{2l}}{2}, \qquad b_{2(m-l)} = l - \frac{a_{2(m-l)}}{2}.$$

რადგან a_{2l} და $a_{2(m-l)}$ ერთი და იმავე ნიშნის რიცხვებია, გვაქვს ერთ-ერთი ორი შესაძლებლობა:

$$b_0 \geq l \geq b_{2(m-l)}$$

ან

$$b_0 \leq l \leq b_{2(m-l)}.$$

რადგანაც მეზობელი მნიშვნელობები ერთმანეთისგან მაქსიმუმ 1-ით განსხვავდება, ამიტომ მოიძებნება ისეთი მთელი i, რომ $b_i = l$.

ეს კი ნიშნავს, რომ შესაბამის სიგრძის $2l$ მონაკვეთში ზუსტად l შავი და l თეთრი ბურთია. მაშასადამე, ეს მონაკვეთი ბალანსირებულია. ლემა დამტკიცებულია.
ახლა მთელი რიგი, რომელიც შედგება 4052 ბურთისგან, დავშალოთ მინიმალურ ბალანსირებულ მონაკვეთებად. ავიღოთ რიცხვები

$$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_p = 2026,$$

ისე, რომ ყოველი i-სთვის, სადაც $0 \leq i \leq p-1$, მონაკვეთი, რომელიც იწყება $(2s_i + 1)$-ე ბურთით და მთავრდება $(2s_{i+1})$-ე ბურთით, იყოს მინიმალური ბალანსირებული მონაკვეთი.
ახლა ავიღოთ ნებისმიერი მთელი k, სადაც

$$0 \leq k \leq 2026.$$

თუ რომელიმე i-სთვის გვაქვს

$$s_i = 2026 - k,$$

მაშინ საკმარისია მოვაშოროთ პირველი

$$2(2026 - k)$$

ბურთი. ეს მონაკვეთი ბალანსირებულია, ამიტომ რიგში დარჩება ზუსტად $2k$ ბურთი.
დავუშვათ ახლა, რომ არცერთი i-სთვის არ სრულდება ტოლობა $s_i = 2026 - k$. მაშინ მოიძებნება ისეთი ინდექსი i, რომ

$$s_i < 2026 - k < s_{i+1}.$$

განვიხილოთ შესაბამისი მინიმალური ბალანსირებული მონაკვეთი S, რომელიც იწყება $(2s_i + 1)$-ე ბურთით და მთავრდება $(2s_{i+1})$-ე ბურთით. ლემის მიხედვით, S-ში არსებობს

$$2(2026 - k - s_i)$$

სიგრძის ბალანსირებული ქვემონაკვეთი, აღვნიშნოთ ის S_1-ით.
გარდა ამისა, პირველი $2s_i$ ბურთიც ქმნის ბალანსირებულ მონაკვეთს, ვუწოდოთ მას S_2.
ახლა თუ ამოვიღებთ ჯერ S_2-ს, შემდეგ კი S_1-ს, დარჩენილი ბურთების რაოდენობა იქნება

$$4052 - 2s_i - 2(2026 - k - s_i) = 2k.$$

ამრიგად, ნებისმიერ შემთხვევაში არაუმეტეს ორი ბალანსირებული ამოღება საკმარისია, ანუ $N \leq 2$. რადგან უკვე ვაჩვენეთ, რომ $N \geq 2$, საბოლოოდ ვღებულობთ პასუხს, $N = 2$.

პასუხი: $N = 2$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) აჩვენა, რომ ერთი ბალანსირებული ამოღება ყოველთვის საკმარისი არ არის, აქედან მიიღო შეფასება $N \geq 2$;

ბ) ჩამოაყალიბა ლემა: მინიმალური ბალანსირებული მონაკვეთის შიგნით ნებისმიერი დასაშვები ლუწი სიგრძის ბალანსირებული ქვემონაკვეთის არსებობის შესახებ;
გ) ლემის დამტკიცებისას შემოიტანა a_i სიდიდეები და აღნიშნა, რომ მინიმალურობის გამო $a_i \neq 0, 1 \leq i \leq 2m-1$;
დ) შემოიტანა b_i სიდიდეები და აღნიშნა, რომ ან $b_0 \geq l \geq b_{2(m-l)}$ ან $b_0 \leq l \leq b_{2(m-l)}$;
ე) შენიშნა, რომ ვინაიდან $b_{i+1} - b_i \in \{-1,0,1\}$ ამიტომ წინა პუნქტი იძლევა ისეთი მთელი i-ს არსებობას, რომ $b_i = l$;
ვ) მთელი რიგი დაშალა მინიმალურ ბალანსირებულ მონაკვეთებად და აჩვენა, რომ თუ $s_i = 2026 - k$ მაშინ პირველი $2s_i$ ბურთის მოშორება იძლევა სასურველ შედეგს;
ვ) ლემის გამოყენებით აჩვენა, რომ თუ $s_i \neq 2026 - k$, ამ შემთხვევაშიც არაუმეტეს ორი ბალანსირებული ამოღება საკმარისია და მიიღო პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ)
3 ქ- ა), ბ), გ)
4 ქ- ა), ბ), გ), დ)
5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)