

ამოცანა N1-ის ამოხსნა და შეფასების სქემა: ტყუპების პარადოქსი

A ნაწილი

A1. დედამიწის სისტემაში რაკეტა ვარსკვლავამდე მივიდა $\frac{d}{v}$ დროში (0.25 pt) და დაბრუნდა $2\frac{d}{v}$ დროში (0.25 pt).

A2. $t_2 = \gamma \left(t_1 - \frac{vx}{c^2} \right)$ (0.5 pt) სადაც $t_1 = \frac{d}{v}$, $x = d$ ანუ $t_2 = \frac{d}{v\gamma}$ (0.5 pt).

A3. $\Delta t_2 = \gamma \left(\Delta t_1 - \frac{v\Delta x}{c^2} \right)$ (0.25 pt) სადაც $\Delta t_2 = 0$, $\Delta x = d$ ანუ $\Delta t_1 = \frac{vd}{c^2}$ (0.25 pt). ესე იგი პირველ სისტემაში მეტეორის დაცემა მოხდა $\frac{d}{v} - \frac{vd}{c^2}$ (0.5 pt) დროს.

A4. $\Delta t_3 = \gamma \left(\Delta t_1 - \frac{v\Delta x}{c^2} \right)$ (0.25 pt) სადაც $\Delta t_2 = 0$, $\Delta x = d$ ანუ $\Delta t_1 = -\frac{vd}{c^2}$ (0.25 pt). ესე იგი პირველ სისტემაში ვულკანის ამოფრქვევა მოხდა $\frac{d}{v} + \frac{vd}{c^2}$ დროს (0.5 pt).

A5. $\frac{d}{v} + \frac{vd}{c^2} - \left(\frac{d}{v} - \frac{vd}{c^2} \right) = 2\frac{vd}{c^2}$ (0.5 pt)

A6. ვინაიდან რაკეტა ეგრევე გადავიდა მორედან მესამე სისტემაში ეგ მოვლენები რაკეტებისათვის მოხდა ერთდროულად (0.5 pt).

A7. რაკეტამ თავისი დათვლით ვარსკვლავს მიაღწია და დაბრუნდა $2\frac{d}{v\gamma}$ დროში (0.125 pt). ვინაიდან რაკეტა დედამიწას შენელებულად ხედავს ის დაინახავს, რომ დედამიწაზე გავიდა $2\frac{d}{v\gamma^2}$ დრო (0.125 pt), მაგრამ ამას უნდა დავუმატოთ ის დრო რომელიც რაკეტამ „გამოტოვა“. რადგან რაკეტამ გამოტოვა მოვლენა 2-იდან მოვლენა 4 -მდე დრო, ამიტომ გასულ დროს ეგ დროც უნდა დავუმატოთ. მთლიანი დრო გამოდის $2\frac{d}{v\gamma^2} + 2\frac{vd}{c^2}$ (0.5 pt) რაც გამარტივების შემდეგ გამოდის $\frac{2d}{v}$ (0.25 pt).

B ნაწილი

B1. დავუშვათ რომ რაკეტის სიჩქარე დედამიწის მიმართ რაღაც მომენტში არის v . განვიხილოთ მაგ სიჩქარით მოძრავი ინერციული სისტემა. მაგ სისტემაში რაკეტის სიჩქარე მცირე dt' დროის შემდეგ იქნება adt' . ხოლო დედამიწის სისტემაში ეგ სიჩქარე იქნება $\frac{v+adt'}{1+\frac{adt'v}{c^2}}$ (0.5 pt). ამიტომ დედამიწის

სისტემაში აჩქარება იქნება $\frac{\left(\frac{v+adt'}{1+\frac{adt'v}{c^2}} - v \right)}{dt}$. იმის გათვალისწინებით რომ $\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma}$ გამარტივების შედეგად

ვიღებთ $\frac{dv}{dt} = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}$ (0.25 pt). ცვლადების გადაწყობის შედეგად ვიღებთ $\int_0^v \frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^t adt$

საიდანაც ვიღებთ $v = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}}$ (0.25 pt). კოორდინატის მისაღებად მიღებული სიჩქარის

ინტეგრირებით ვიღებთ

$x = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right)$ (1.0 pt).

B2. ჩვენ სისტემაში რაკეტის $\frac{d}{2}$ -მდე მისაღწევად საჭირო დრო შეიძლება გამოვთვალოთ $\frac{d}{2} = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right) \rightarrow t = \frac{c}{a} \sqrt{\left(\frac{da}{2c^2} + 1 \right)^2 - 1}$. მთლიანი დრო იქნება $\frac{4c}{a} \sqrt{\left(\frac{da}{2c^2} + 1 \right)^2 - 1}$ (0.5 pt).

B3. $\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma}$ სადაც $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ (0.25 pt). წინა პუქტიდან გამომდინარე $v = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}}$ ანუ $\gamma = \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}$ (0.5 pt). ესიგი $dt' = \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}}$ ინტეგრირებით ვიღებთ რომ $t' = \frac{c}{a} \operatorname{arcsinh} \frac{at}{c}$ (0.5 pt). ანუ წასვლისას გზის

ნახევარზე მისვლისას რაკეტაში გასული დრო იქნება $t' = \frac{c}{a} \operatorname{arcsinh} \sqrt{\left(\frac{da}{2c^2} + 1 \right)^2 - 1}$ ხოლო მთლიანი დრო როცა რაკეტა დაბრუნდება $\frac{4c}{a} \operatorname{arcsinh} \sqrt{\left(\frac{da}{2c^2} + 1 \right)^2 - 1}$ (0.25 pt).

B4. დედამიწაზე გასული დრო არის $\frac{4c}{a} \sqrt{\left(\frac{da}{2c^2} + 1 \right)^2 - 1} \approx 5 \cdot 10^6$ წ. (0.25 pt) ხოლო რაკეტაში გასული დრო $\frac{4c}{a} \operatorname{arcsinh} \sqrt{\left(\frac{da}{2c^2} + 1 \right)^2 - 1} \approx 56$ წ. (0.25 pt) Arcsinh-ის დათვლა შეიძლება $\frac{e^x - e^{-x}}{2} \approx \frac{e^x}{2} = y$ განტოლების ამოხსნით x -სათვის.

ამოცანა N2-ის ამოხსნა და შეფასების სქემა: დიპოლების დინამიკა ელექტრომაგნიტურ ველში

A ნაწილი

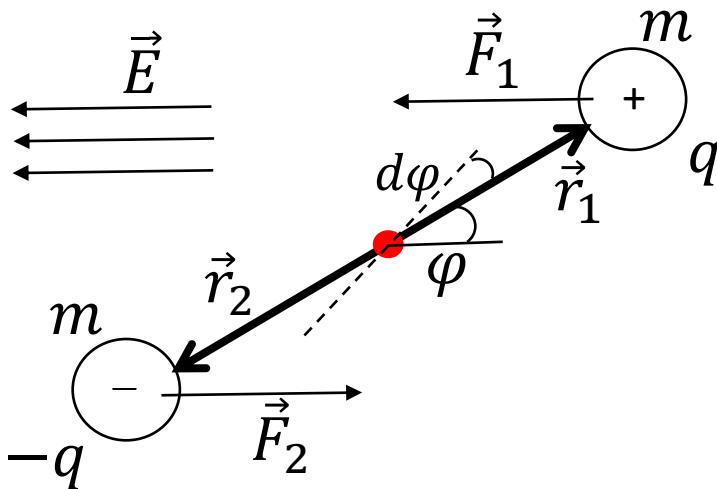
A1. დავითვალოთ ელექტრული ველის მიერ შესრულებული მცირე მუშაობა დიპოლის $d\varphi$ მცირე კუთხით მობრუნებისას ქვემოთ მოყვანილი ნახაზიდან გამომდინარე:

$$dA = F_1 r_1 d\varphi \sin\varphi + F_2 r_2 d\varphi \sin\varphi = Eb \cdot d\varphi \cdot \sin\varphi = -Eb \cdot d(\cos\varphi) = d(\vec{E}\vec{b}) \quad (0.5 \text{ pt})$$

აქედან კი ავტომატურად გამომდინარეობს, რომ დიპოლის პოტენციური ენერგია ელექტრულ ველში ტოლია:

$$W = -\vec{E}\vec{b} = -|E||b|\cos\alpha \quad (0.5 \text{ pt})$$

სადაც $\alpha = \pi - \varphi$ არის კუთხე ელექტრული ველის $\vec{E}$ და დიპოლის $\vec{b}$ ვექტორების მიმართულებებს შორის.



A2. სქემატური ნახაზიდან ჩანს, რომ ელექტრული ველი $\vec{E}$ ქმნის ძალთა მახრუნებელ მომენტს, რომელიც, როგორც ცნობილია, იმპულსის მომენტის ცვლილების ტოლია, ანუ გვაქვს შემდეგი განტოლება:

$$\frac{d}{dt}(m[\vec{r}_1 \times \vec{v}_1] + m[\vec{r}_2 \times \vec{v}_2]) = q[\vec{r}_1 \times \vec{E}] - q[\vec{r}_2 \times \vec{E}] \quad (0.2 \text{ pt})$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$ და დიპოლური მომენტი განისაზღვრება როგორც $\vec{b} = q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ ზედა განტოლება გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{d}{dt} \left[\vec{b} \times \frac{d\vec{b}}{dt} \right] = \frac{2q^2}{m} [\vec{b} \times \vec{E}] \quad (0.8 \text{ pt})$$

და საბოლოოდ ვიღებთ:

$$\left[\vec{b} \times \frac{d^2\vec{b}}{dt^2} \right] = \frac{2q^2}{m} [\vec{b} \times \vec{E}] \quad (0.5 \text{ pt})$$

A3. ახლა წარმოვადგინოთ დიპოლური მომენტი სტატიკური და მცირე გადახრის ჯამის სახით:
 $\vec{b}(t) = \vec{b}_0 + \vec{\delta b}(t)$, ჩავსვათ წინა განტოლებაში და შევინარჩუნოთ მხოლოდ წრფივი წევრები $\vec{\delta b}$ -ს მიმართ. მაშინ გვექნება:

$$\left[\vec{b}_0 \times \frac{d^2 \vec{\delta b}}{dt^2} \right] = \frac{2q^2}{m} [\vec{b}_0 \times \vec{E}] \quad (0.6 \text{ pt})$$

ამასთან ერთად, რადგან დიპოლის აბსოლუტური მნიშვნელობა უცვლელი რჩება, ცხადია, რომ $\vec{b}_0$ და $\vec{\delta b}$ ერთმანეთის პერპენდიკულარულები არიან. ანუ რადგან $\vec{b}_0$ მიმართულია z ღერძის გასწვრივ, აქედან გვაქვს, რომ $\delta b_z = 0$. (0.2 pt)

გადახრის დანარჩენი ორი გეგმილი კი პროპორციულია ელექტრული ველის შესაბამისი გეგმილებისა და მთლიანობაში გვაქვს ტოლობა:

$$\delta b_x = -\frac{2q^2}{m\omega^2} E_{0x} \cos(\omega t), \quad \delta b_y = -\frac{2q^2}{m\omega^2} E_{0y} \cos(\omega t) \quad (0.2 \text{ pt})$$

A4. დროში ცვლადი პოლარიზაცია გამოითვლება როგორც:

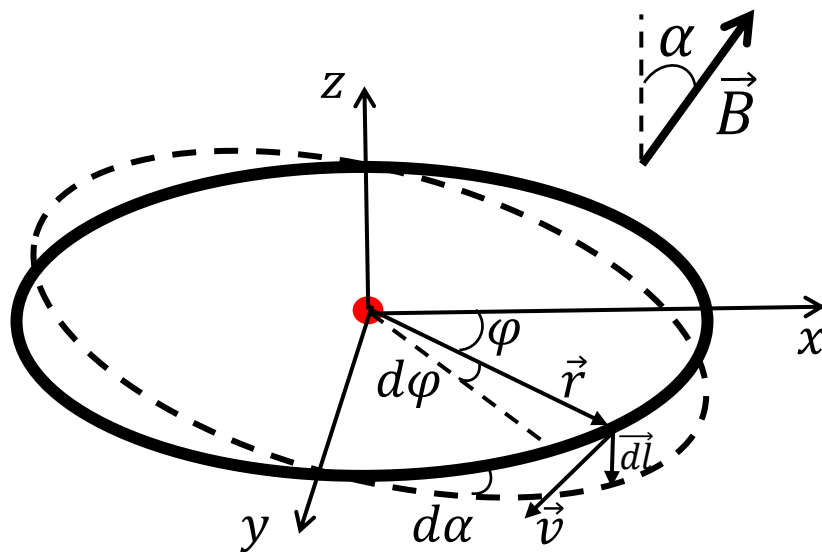
$$\vec{P} = \frac{\vec{\delta b}}{a^3} \quad (0.2 \text{ pt})$$

A5. და საბოლოოდ გვაქვს ელექტრული ინდუქციისთვის: (0.3 pt)

$$D_x = \epsilon_0 \left(1 - \frac{2q^2}{m\omega^2 a^3 \epsilon_0} \right) E_{0x} \cos(\omega t), \quad D_y = \epsilon_0 \left(1 - \frac{2q^2}{m\omega^2 a^3 \epsilon_0} \right) E_{0y} \cos(\omega t), \quad D_z = \epsilon_0 E_{0z} \cos(\omega t)$$

B ნაწილი

B1. გამოვთვალოთ წრიული დენის ენერგია მაგნიტურ ველში. ისევე როგორც ელექტრული დიპოლების შემთხვევაში, აქაც დავითვალოთ მუშაობა წრიული კონტურის y ღერძის ირგვლივ მცირე $d\alpha$ კუთხით მობრუნებისას, რაც ქვემოთ ნახაზზეა გამოსახული:



$$dA = \int dq([\vec{v} \times \vec{B}] \cdot \vec{dl}) = -\frac{q}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot v_y B_x r_x \right) \cdot d\alpha = -\frac{q}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \cos^2 \varphi \right) \cdot vr B_x d\alpha \quad (1.0 \text{ pt})$$

და მცირე შესრულებული მუშაობისთვის მივიღებთ:

$$dA = -\frac{q}{2} \cdot vr B_x d\alpha = \frac{q}{2} vr B \cdot d(\cos \alpha) \quad (0.2 \text{ pt})$$

ესე იგი წრიული დენის ენერგია მაგნიტურ ველში გამოსახება შემდეგნაირად:

$$W = -\frac{q}{2} vr B \cdot \cos \alpha = -\frac{q}{2m} B \cos \alpha (m[\vec{r} \times \vec{v}]) \quad (0.3 \text{ pt})$$

ეს კი იგივეა, რაც $W = -\frac{q}{2m} \vec{B} \vec{L} = -\vec{B} \vec{M}$, სადაც $\vec{L} = m[\vec{r} \times \vec{v}]$ წრიული დენის იმპულსის მომენტი, $\vec{M} = \frac{q}{2m} \vec{L}$ მაგნიტური მომენტი, ხოლო $\gamma = \frac{q}{2m}$ -ს გირომაგნიტური თანაფარდობა ეწოდება.

B2. მოძრაობის განტოლებების დასაწერად ისევ ვიყენებთ, რომ რგოლის ჯამური იმპულსის მომენტის ცვლილება ჯამური ძალის მომენტის ტოლია, ანუ ვწერთ:

$$\frac{d}{dt} \left(\int dm[\vec{r} \times \vec{v}] \right) = \int dq [\vec{r} \times [\vec{v} \times \vec{B}]] \quad (0.8 \text{ pt})$$

რომელიც შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$m \frac{d}{dt} ([\vec{r} \times \vec{v}]) = \frac{q}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi [\vec{r} \times [\vec{v} \times \vec{B}]] \quad (0.2 \text{ pt})$$

და დავიწყოთ მარჯვენა ნაწილის გამოთვლა:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi [\vec{r} \times [\vec{v} \times \vec{B}]] = \int_0^{2\pi} d\varphi \{ \vec{v}(\vec{r} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{r} \cdot \vec{v}) \} = \int_0^{2\pi} d\varphi \vec{v}(\vec{r} \cdot \vec{B}) \quad (0.3 \text{ pt})$$

მიღებულ გამოსახულებას მხოლოდ x და y მდგენელები გააჩნია. y მდგენელი შემდეგნაირად გამოითვლება

$$\left[\int_0^{2\pi} d\varphi \vec{v}(\vec{r} \cdot \vec{B}) \right]_y = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot rv B_x \cos^2 \varphi = \pi r v B_x \quad (0.2 \text{ pt})$$

ხოლო x მდგენელი კი ნულის ტოლია (0.2 pt).

ახლა დავამტკიცოთ, რომ იგივენაირი შედეგი (ორჯერ მეტი) მიიღება, თუ გამოვითვლით შემდეგ ინტეგრალს:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi [\vec{B} \times [\vec{r} \times \vec{v}]] = \left[\vec{B} \times \int_0^{2\pi} d\varphi [\vec{r} \times \vec{v}] \right] \quad (0.2 \text{ pt})$$

რომელსაც აგრეთვე მხოლოდ y მდგენელი გააჩნია:

$$\left[\vec{B} \times \int_0^{2\pi} d\varphi [\vec{r} \times \vec{v}] \right]_y = 2\pi r v B_x \quad (0.5 \text{ pt})$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა. ამგვარად საწყის განტოლებაში $\frac{q}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi [\vec{r} \times [\vec{v} \times \vec{B}]]$ შეგვიძლია ჩავანაცვლოთ გამოსახულებით $\frac{q}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi [\vec{B} \times [\vec{r} \times \vec{v}]]$ და მივიღებთ სხვანაირად გადაწერილ საწყის განტოლებას:

$$m \frac{d}{dt} ([\vec{r} \times \vec{v}]) = \frac{q}{4\pi} \left[\vec{B} \times \int_0^{2\pi} d\varphi [\vec{r} \times \vec{v}] \right] = \frac{q}{2} [\vec{B} \times [\vec{r} \times \vec{v}]]$$

და საბოლოოდ ვღებულობთ ლანდაუ-ლიფშიცის განტოლებას:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{q}{2m} [\vec{B} \times \vec{M}] \quad (0.3 \text{ pt})$$

B3. ახლა ავიღოთ მცირე ჰარმონიული ველი $\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\omega t)$ და წარმოვადგინოთ $\vec{M} = \vec{M}_0 + \delta\vec{M}$, სადაც $\vec{M}_0$ მიმართულია z ღერძის გასწვრივ, ხოლო $\delta\vec{M}$ დროზე დამოკიდებული მცირე სიდიდეა. მაშინ ლანდაუ ლიფშიცის განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\delta M_x = \frac{q}{2m\omega} B_{0y} M_0 \sin(\omega t), \quad \delta M_y = -\frac{q}{2m\omega} B_{0x} M_0 \sin(\omega t), \quad \delta M_z = 0 \quad (1.5 \text{ pt})$$

B4. და დამაგნიტებულობის სიმკვრივისთვის ვიღებთ:

$$\delta R_x = \frac{q}{2m\omega a^3} B_{0y} M_0 \sin(\omega t), \quad \delta R_y = -\frac{q}{2m\omega a^3} B_{0x} M_0 \sin(\omega t), \quad \delta R_z = 0 \quad (0.2 \text{ pt})$$

B5. და საბოლოოდ მაგნიტური ინდუქციის ვექტორის დროზე დამოკიდებულ ნაწილს ჩავწერთ როგორც

$$H_x = \frac{B_{0x}}{\mu_0} \cos(\omega t) + \frac{q}{2m\omega a^3} B_{0y} M_0 \sin(\omega t), \quad H_y = \frac{B_{0y}}{\mu_0} \cos(\omega t) - \frac{q}{2m\omega a^3} B_{0x} M_0 \sin(\omega t),$$

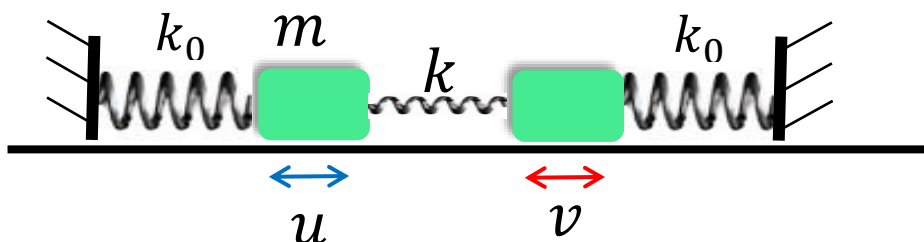
$$H_z = \frac{B_{0z}}{\mu_0} \cos(\omega t) \quad (0.3 \text{ pt})$$

ამოცანა N3-ის ამოხსნა და შეფასების სქემა: რაზის ოსცილაციები მექანიკურ რხევით სისტემაში

A ნაწილი

A1. ტოლი მასების შემთხვევაში მარცხენა და მარჯვენა სხეულების მოძრაობის განტოლებები ავტომატურად გამომდინარეობს ნიუტონის მეორე კანონიდან:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -k_0 u + k(v - u); \quad m \frac{d^2 v}{dt^2} = -k_0 v + k(u - v) \quad (0.5 \text{ pt})$$



A2. ჰარმონიული რხევების მოდის $u = A \cos(\omega t + \varphi)$, $v = B \cos(\omega t + \varphi)$ ჩასმით მივიღებთ წრფივი ალგებრული განტოლებების სისტემას A და B ამპლიტუდებისთვის:

$$[m\omega^2 - (k_0 + k)]A + kB = 0; \quad [m\omega^2 - (k_0 + k)]B + kA = 0$$

როგორც ცნობილია, ამ ერთგვაროვანი განტოლებების სისტემას არანულოვანი ამოხსნები აქვს თუ შესაბამისი მატრიცის

$$\begin{bmatrix} m\omega^2 - (k_0 + k) & k \\ k & m\omega^2 - (k_0 + k) \end{bmatrix}$$

დეტერმინანტი ნულის ტოლია, რაც იძლევა ორ ამონახსნს, რომლებიც ორ სხვადასხვა სიხშირეს შეესაბამება

$$\omega_1^2 = \frac{k_0}{m}; \quad \omega_2^2 = \frac{k_0 + 2k}{m} \quad (0.8 \text{ pt})$$

რასაც, თავის მხრივ, შეესაბამება ორი საკუთარი მოდა:

$$u_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1); \quad v_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

და

$$u_2 = -A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2); \quad v_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (0.2 \text{ pt})$$

A3. და ზოგადი ამოხსნა ჩაიწერება ამ მოდელების წრფივი კომბინაციის სახით:

$$u(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2);$$

$$v(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

ამოცანაში მოცემული საწყისი პირობების შემთხვევაში, როცა დროის საწყისი მომენტისთვის ორივე სხეულის სიჩქარეები ნულის ტოლია, პირველი სხეულის წანაცვლებაც ნულია, ხოლო მეორეს წანაცვლება ნულისგან განსხვავებული. ამ პირობებში

$$\varphi_2 = \varphi_1 = 0; \quad A_1 = A_2 \quad (0.6 \text{ pt})$$

საბოლოოდ კი მივიღებთ სხეულების რხევით მოძრაობას შემდეგი სახით:

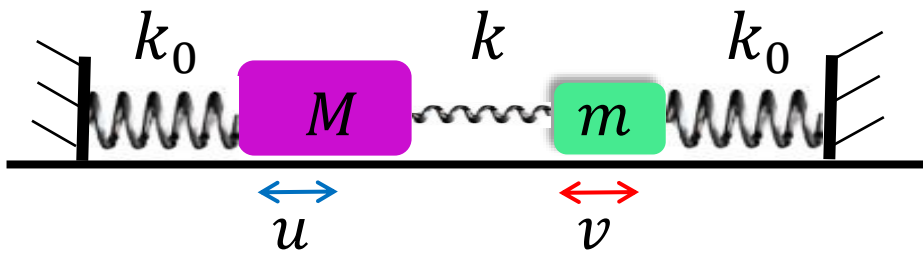
$$u(t) = A_1[\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)]; \quad v(t) = A_1[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] \quad (0.2 \text{ pt})$$

როგორც ვხედავთ, ორივე სხეულის სიჩქარე დროის საწყის მომენტში ნულის ტოლია, ამიტომ მათ მხოლოდ პოტენციური ენერგიები გააჩნიათ. ამგვარად მარცხენა სხეულის სრული საკუთარი ენერგია ტოლია ნულის, ხოლო მარჯვენას სრული საკუთარი ენერგია $2k_0 A_1^2$. ანალოგიურად ითვლება მისი ენერგია, როგორც $2k A_1^2$. (0.2 pt)

A4. ზედა გამოსახულებებიდან ჩანს, რომ მარჯვენა სხეულიდან მთელი ენერგია გადადის მარცხენაში იმ დროში, რომელიც გამოითვლება პირობიდან $\omega_2 t - \omega_1 t = \pi$ (1.2 pt), ასე რომ რაბის ოსცილაციები პერიოდი მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{k_0 + 2k} - \sqrt{k_0}} \quad (0.3 \text{ pt})$$

B ნაწილი



B1. დავწეროთ ნიუტონის მეორე კანონი ორივე სხეულისთვის. გვექნება:

$$M \frac{d^2 u}{dt^2} = -k_0 u + k(v - u); \quad m \frac{d^2 v}{dt^2} = -k_0 v + k(u - v) \quad (0.2 \text{ pt})$$

ვეძებთ რხევითი მოდელები შემდეგი ფორმით:

$$u = A \cos(\omega t + \varphi), \quad v = B \cos(\omega t + \varphi).$$

ჩასმით მივიღებთ წრფივი ალგებრული განტოლებების სისტემას A და B ამპლიტუდებისთვის:

$$[M\omega^2 - (k_0 + k)]A + kB = 0; \quad [m\omega^2 - (k_0 + k)]B + kA = 0 \quad (0.3 \text{ pt})$$

როგორც ცნობილია, ამ ერთგვაროვანი განტოლებების სისტემას არანულოვანი ამოხსნები აქვს, თუ შესაბამისი მატრიცის

$$\begin{bmatrix} M\omega^2 - (k_0 + k) & k \\ k & m\omega^2 - (k_0 + k) \end{bmatrix}$$

დეტერმინანტი ნულის ტოლია, რაც იძლევა ორ ამონახსნს, რომლებიც ორ სხვადასხვა სიხშირეს შეესაბამება (მიახლოებითი ტოლობები მოცემულია $k \ll k_0$ და $4mMk^2/[(M-m)^2(k_0+k)^2] \ll 1$ პირობების გათვალისწინებით): (0.5 pt)

$$\omega_1^2 = \frac{(M+m)(k_0+k) - \sqrt{(M-m)^2(k_0+k)^2 + 4mMk^2}}{2Mm} \approx \frac{k_0+k}{M};$$

$$\omega_2^2 = \frac{(M+m)(k_0+k) + \sqrt{(M-m)^2(k_0+k)^2 + 4mMk^2}}{2Mm} \approx \frac{k_0+k}{m}$$

რასაც, თავის მხრივ, შეესაბამება ორი საკუთარი მოდა: (0.5 pt)

$$u_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1); \quad v_1 = A_1 \frac{\sqrt{(M-m)^2(k_0+k)^2 + 4mMk^2} - (M-m)(k_0+k)}{2mk} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

და

$$u_2 = B_2 \frac{-2mk}{\sqrt{(M-m)^2(k_0+k)^2 + 4mMk^2} + (M-m)(k_0+k)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2); \quad v_2 = B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

B2. ზოგადი ამოხსნა ჩაიწერება ამ მოდელების წრფივი კომბინაციის სახით, სადაც უნდა გავაკეთოთ მიახლოება პირობების $k \ll k_0$ და $4mMk^2/[(M-m)^2(k_0+k)^2] \ll 1$ გათვალისწინებით (0.3 pt):

$$u(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - B_2 \frac{mk}{(M-m)k_0} \cos(\omega_2 t + \varphi_2);$$

$$v(t) = A_1 \frac{Mk}{(M-m)k_0} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

ამოცანის პირობების მიხედვით დროის საწყისი მომენტისთვის ორივე სხეულის სიჩქარეები ნულის ტოლია, პირველი სხეულის წანაცვლებაც ნულია, ხოლო მეორეს წანაცვლება ნულისგან განსხვავებული. სისტემის ასეთი საწყისი მდგომარეობა შეესაბამება ამოცანის პარამეტრების შემდეგ მნიშვნელობებს: (2.0 pt)

$$\varphi_2 = \varphi_1 = 0; \quad A_1 = B_2 \frac{mk}{(M-m)k_0}$$

ამგვარად ძლაკების წანაცვლებები შემდეგნაირადაა დამოკიდებული სისტემის ერთადერთ თავისუფალ პარამეტრ B_2 -ზე: (0.2 pt)

$$u(t) = B_2 \frac{mk}{(M-m)k_0} [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)];$$

$$v(t) = B_2 \left[\frac{mMk^2}{(M-m)^2 k_0^2} \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) \right]$$

B3. ზემოთა გამოსახულება ავტომატურად იძლევა მარჯვენა ძელაკის საწყისი საკუთარი ენერგიის მნიშვნელობას: (0.3 pt)

$$E_2(0) = \frac{k_0 B_2^2}{2} \left[1 + \frac{mMk^2}{(M-m)^2 k_0^2} \right]^2$$

მარცხენა ძელაკი მაქსიმალურად წაინაცვლებს $T/2 = \pi/(\omega_2 - \omega_1)$. (0.7 pt)

ამ დროში მარჯვენა სხეულის სიჩქარე ისევ ნულის ტოლი იქნება, ასე რომ მისი ენერგია ისევ მხოლოდ პოტენციური ენერგიის ტოლი იქნება და ტოლია:

$$E_2(T/2) = \frac{k_0 B_2^2}{2} \left[1 - \frac{m M k^2}{(M - m)^2 k_0^2} \right]^2 \quad (0.8 \text{ pt})$$

ამ ორი ენერგიის შედარება მიახლოებით გვაძლევს:

$$E_2(0) - E_2(T/2) \approx 2k_0 B_2^2 \frac{m M k^2}{(M - m)^2 k_0^2} \quad (0.2 \text{ pt})$$

ესე იგი მარჯვენა სხეული რაბის ოსცილაციების დროს კარგავს მაქსიმალურ ენერგიას, რომლის წილია:

$$\frac{E_2(0) - E_2(T/2)}{E_2(0)} \approx \frac{4m M k^2}{(M - m)^2 k_0^2}$$

რაც მცირე სიდიდეა.