

ამოცანა 1

ტალღგამტარების ფიზიკა (10 ქულა)

ტალღგამტარებს მნიშვნელოვანი ადგილი უჭირავს ჩვენს ყოველდღიურ ცხოვრებაშიც კი. მათი თვისებაა ტალღური ენერგიის გატარება სივრცეში გაშლის გარეშე და მინიმალური დანაკარგებით. ზომები შეიძლება იყოს მიკრომეტრის რიგის (ხილული სინათლის გატარებისთვის) და აღწევდეს დიდ მასშტაბებსაც, მაგალითად, ჩვეულებრივი რკინა-ბეტონის საავტომობილო გვირაბიც ტალღგამტარად შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ რადიო-ტალღებისთვის. ამ ამოცანის ფარგლებში შევისწავლით თეორიულად უმარტივეს შემთხვევას, როცა ტალღგამტარის კედელი იდეალური გამტარია, ხოლო ფორმა ბრტყელი ან მართკუთხა აქვს. ასეთ შემთხვევაში ამოხსნები მარტივად იწერება ელემენტარული ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით. საბოლოო მიზანია ტალღგამტარის სხვადასხვა გეომეტრიებში ტალღის იმ კრიტიკული სიხშირის დადგენა, რომელზე ნაკლები სიხშირის ტალღის გატარება შეუძლებელია.

ნაწილი A: ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელება თავისუფალ სივრცეში (1.0 ქულა)

განვიხილოთ ვაკუუმში ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელება, როცა სივრცე არაფრითაა შემოსაზღვრული. ასეთ შემთხვევაში კოჰერენტული ბრტყელი სინათლის ტალღის ელექტრული და მაგნიტური ველის გამოსახულებები

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}), \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (1)$$

სადაც ω სინათლის ტალღის სიხშირეა, ხოლო $\vec{k}$ კი ტალღური ვექტორი, წარმოადგენენ მაქსველის განტოლებების ამონახსნებს ვაკუუმში (ანუ ტალღგამტარის შიგნით). მაქსველის განტოლებები დიფერენციალური სახით მოიცემა შემდეგნაირად:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (2)$$

სადაც μ_0 და ϵ_0 ვაკუუმის მაგნიტური და ელექტრული მუდმივებია, ხოლო $\vec{\nabla}$ -ს აქვს კერძო წარმოებულობა გეგმილები $\vec{\nabla} \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$. კერძო წარმოებული შემოაქვთ, როდესაც გვაქვს რამდენიმე ცვლადის ფუნქცია და წარმოებული რომელიმე ცვლადით აიღება ისე, რომ ყველა სხვა ცვლადი მუდმივებადაა ჩათვლილი. მაგალითად, $\partial/\partial z$ და $\partial/\partial t$ კოორდინატით და დროით კერძო წარმოებულებია და თუ ვიღებთ დროით კერძო წარმოებულს $f(t, z)$ ფუნქციიდან, გაწარმოებისას z ცვლადი მუდმივად უნდა ჩავთვალოთ. განტოლებები (2) გაშლილად ასე ჩაიწერება:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}; & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}; & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}; & \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}; & \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 0; & \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

მაგალითად, თუ ჩავსვამთ (1) გამოსახულებებს (2) განტოლებებში, მივიღებთ:

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \mu_0 \omega \vec{H}_0; \quad \vec{k} \times \vec{H}_0 = -\epsilon_0 \omega \vec{E}_0; \quad \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0; \quad \vec{k} \cdot \vec{H}_0 = 0$$

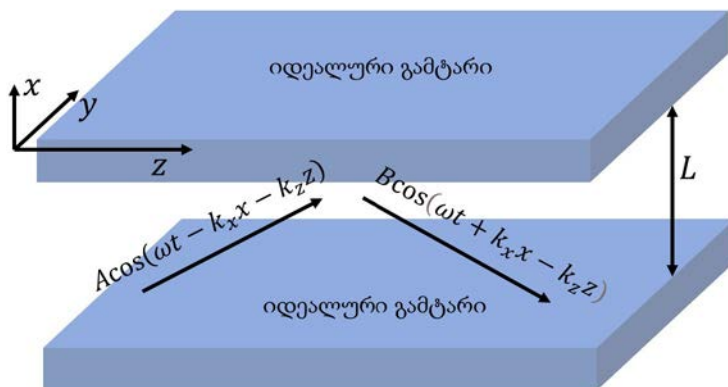
A.1 გამოიყვანეთ სინათლის დისპერსიის კანონი (სინათლის სიხშირის ტალღურ ვექტორზე დამოკიდებულება), ანუ გამოითვალეთ ω როგორც ტალღური ვექტორის k_x , k_y , k_z გეგმილების და c სინათლის სიჩქარის ფუნქცია. **0.5 pt.**

A.2 ვთქვათ გვაქვს მოცემული კოჰერენტული სინათლის **0.5 pt.**
ელექტრული ველის ამპლიტუდები $\vec{E}_0 \equiv (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$. გამოსახეთ
მაგნიტური ველების ამპლიტუდები H_{0x}, H_{0y}, H_{0z} ელექტრული
ველის გეგმილების ამპლიტუდებით, ω სიხშირითა და $k_x, k_y,$
 k_z ტალღური ვექტორის გეგმილებით.

მითითება: გამოიყენეთ ორმაგი ვექტორული ნამრავლის ფორმულა $\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$.

ნაწილი B: ბრტყელი ტალღამტარი (5.0 ქულა)

განვიხილოთ ახლა ტალღამტარი, რომელიც შედგება ორი ერთმანეთის პარალელური
იდეალური გამტარი სიბრტყისგან (ნახატი 1) და შევისწავლოთ ამ სიბრტყეებს შორის



ნახატი 1: ბრტყელი ტალღამტარის სქემატური სურათი.
დაცემული და არეკვლილი სხივების მიმართულება და
ანალიზური გამოსახულება.

ელექტრომაგნიტური ტალღების
გავრცელება. ამოცანის შემდგომი
დავალებებისათვის დაგვჭირდება
გადაბმის პირობები იდეალური
ელექტრული გამტარის ზედაპირზე.
ცხადია, რომ იდეალური გამტარის
შიგნით ელექტრული და მაგნიტური
ველები ნულია (წინააღმდეგ
შემთხვევაში გამტარის შიგნით
უსასრულო დენები გვქენებოდა),
ამიტომ გვაქვს შემდეგი პირობები
ელექტრული და მაგნიტური
ველებისათვის იდეალური გამტარის
ზედაპირებთან:

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0; \quad \vec{n} \cdot \vec{E} = \rho_s / \epsilon_0; \quad \vec{n} \times \vec{H} = \vec{J}_s; \quad \vec{n} \cdot \vec{H} = 0 \quad (3)$$

სადაც ρ_s მუხტის ზედაპირული სიმკვრივეა და $\vec{J}_s$ კი ზედაპირული დენის სიმკვრივე
იდეალური გამტარის ზედაპირზე. $\vec{n}$ არის იდეალური გამტარის ზედაპირის გარე ნორმალის.
ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\vec{k}$ ტალღური ვექტორი zx
სიბრტყეშია, ანუ $k_y = 0$.

დავიწყოთ მართობული მაგნიტური ველის მოდის (TM მოდა) განხილვით, ანუ
ჩავთვალოთ, რომ მაგნიტური ველის გრძივი მდგენელი $H_z = 0$ და დავიწყოთ ველის სხვა
კომპონენტების გამოთვლა (2) განტოლებების საშუალებით და (3) სასაზღვრო პირობებით.
აქ ჩვენ მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ ტალღამტარის შიგნით დაცემული და
არეკვლილი ტალღები გვაქვს, რომლებიც ერთნაირი k_z და სხვადასხვანაირ ნიშნიანი k_x -ით
ხასიათდებიან. მთლიანი ველი კი ამ ორი ტალღის სუპერპოზიციით მიიღება. განვიხილოთ
 E_z კომპონენტი, რომელიც წარმოდგება როგორც დაცემული და არეკვლილი ტალღის
სუპერპოზიცია:

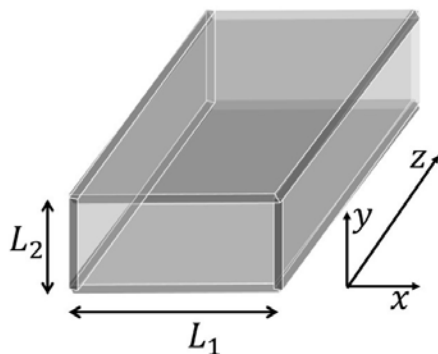
$$E_z = A \cos(\omega t - k_x x - k_z z) + B \cos(\omega t + k_x x - k_z z) \quad (4)$$

B.1 სასაზღვრო პირობების გამოყენებით დაწერეთ A და B კოეფიციენტებს **1.0 pt.**
შორის დამოკიდებულება. მიღებული თანადგომის გამოყენებით
ჩაწერეთ გამოსახულება E_z -სთვის და იპოვეთ k_x ტალღური ვექტორის
შესაძლო მნიშვნელობები, რომლებისთვისაც E_z არ არის ყველგან ნული

	ტალღგამტარის შიგნით. ტალღგამტარის სისქე (მანძილი იდეალური გამტარების სიბრტყეებს შორის) იყოს L .	
B.2	გამოითვალეთ ელექტრომაგნიტური ტალღის ელექტრული E_x, E_y და მაგნიტური H_x, H_y ველების მდგენელები მაქსველის (2) განტოლებების, (3) სასაზღვრო პირობების და (4) გამოსახულების დახმარებით.	1.0 pt.
B.3	გამოითვალეთ ზედა და ქვედა იდეალურ გამტარ სიბრტყეში ზედაპირული მუხტის სიმკვრივე და დენის სიმკვრივე და მიმართულება.	0.5 pt.
ახლა გადავიდეთ მართობულ ელექტრული ველის (TE მოდა) შემთხვევის განხილვაზე, ესე იგი როდესაც $E_z = 0$. გავიხსენოთ ასევე, რომ ზოგადობის დაურღვევლად ჩვენ გვაქვს აგრეთვე $k_y = 0$. დავიწყოთ დაცემული და არეკვლილი სინათლის სხივების ველების სუპერპოზიციის H_x კომპონენტის განხილვით:		
	$H_x = A \cos(\omega t - k_x x - k_z z) + B \cos(\omega t + k_x x - k_z z)$	(5)
B.4	სასაზღვრო პირობების გამოყენებით დაწერეთ A და B კოეფიციენტებს შორის დამოკიდებულება და გამოითვალეთ ელექტრომაგნიტური ტალღის ელექტრული E_x, E_y და მაგნიტური H_y, H_z ველების მდგენელები მაქსველის (2) განტოლებების და (5) გამოსახულების დახმარებით.	1.0 pt.
B.5	გამოიკვლიეთ არსებობს თუ არა $k_x = 0$ შემთხვევაში არანულოვანი ამოხსნები ელექტრომაგნიტური ტალღისთვის. ჩაწერეთ არანულოვანი ელექტრული და მაგნიტური ველის კომპონენტები. რა არის ბრტყელ ტალღგამტარში გავრცელებული ტალღის მინიმალური სიხშირე?	1.5 pt.

ნაწილი C: მართკუთხა ტალღგამტარი (4.0 ქულა)

ახლა დავიწყოთ მართკუთხა ფორმის ტალღგამტარის განხილვა (ნახატი 2), რომელიც შემოფარგლავს იდეალური გამტარით სივრცეს $0 < x < L_1$ და $0 < y < L_2$. ისევე როგორც ბრტყელი ტალღგამტარის შემთხვევაში, აქაც შევისწავლით მართობული მაგნიტური



ნახატი 2: მართკუთხა ტალღგამტარის სქემატური სურათი.

ველის (TM mode) და მართობული ელექტრული ველის (TE mode) შემთხვევებს. პირველ ყოვლისა ვნახოთ რა სახე ექნება TM მოდას, ანუ როგორც წინათ, ჩავთვალოთ, რომ მაგნიტური ველის გრძივი მდგენელი $H_z = 0$ და დავიწყოთ ველის სხვა კომპონენტების გამოთვლა (2) განტოლებების საშუალებით და (3) სასაზღვრო პირობებით. აქ ჩვენ მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ ტალღგამტარის შიგნით დაცემული და არეკვლილი ტალღები გვაქვს, რომლებიც ერთნაირი k_z და სხვადასხვანაირ ნიშნიანი k_x და k_y -ით ხასიათდებიან. მთლიანი ველი კი ამ ტალღების სუპერპოზიციით მიიღება.

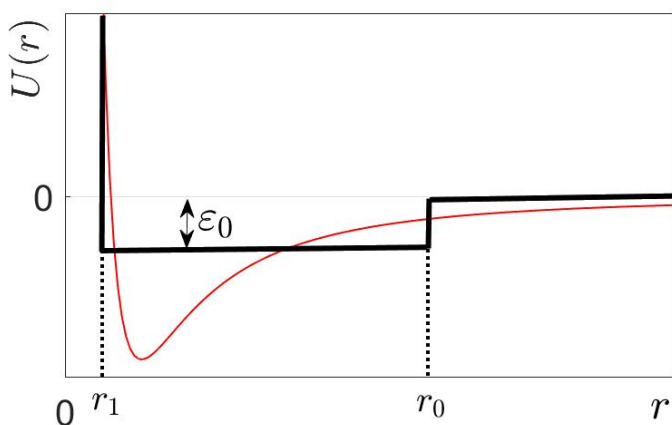
C.1	ჩაწერეთ E_z გამოსახულება დაცემული და არეკვლილი ტალღების კომბინაციით (4)-ის ანალოგიურად, ოღონდ მართკუთხა ტალღგამტარის შემთხვევისთვის. სასაზღვრო პირობების გამოყენებით დაწერეთ დაცემულ და არეკვლილი ტალღების კოეფიციენტებს შორის დამოკიდებულება. ჩაწერეთ გამოსახულება E_z -სთვის მიღებული თანაფარდობის გამოყენებით და იპოვეთ k_x და k_y ტალღური ვექტორის მდგენელების შესაძლო მნიშვნელობები.	1.0 pt.
------------	---	----------------

C.2	გამოითვალეთ ელექტრომაგნიტური ტალღის ელექტრული E_x, E_y და მაგნიტური H_x, H_y ველების მდგენელები მაქსველის (2) განტოლებების დახმარებით. გამოიკვლიეთ არსებობს თუ არა $k_x = 0$ ან $k_y = 0$ შემთხვევაში არანულოვანი ამოხსნები ელექტრომაგნიტური ტალღისთვის. რა არის მართკუთხა ტალღამტარში გავრცელებული TM მოდის მინიმალური სიხშირე?	1.0 pt.
ახლა გადავიდეთ TE მოდაზე (მართობული ელექტრული ველი), ანუ როგორც წინათ, ჩავთვალოთ, რომ ელექტრული ველის გრძივი მდგენელი $E_z = 0$ და დავიწყეთ ველის სხვა კომპონენტების გამოთვლა (2) განტოლებების საშუალებით და (3) სასაზღვრო პირობებით.		
C.3	გამოითვალეთ ელექტრომაგნიტური ტალღის ელექტრული E_x, E_y და მაგნიტური H_x, H_y, H_z ველების მდგენელები მაქსველის (2) განტოლებების და (3) სასაზღვრო პირობების გამოყენებით.	1.0 pt.
C.4	გამოიკვლიეთ არსებობს თუ არა $k_x = 0$ ან $k_y = 0$ შემთხვევაში არანულოვანი ამოხსნები ელექტრომაგნიტური ტალღისთვის. თუ $L_1 > L_2$, რა იქნება მართკუთხა ტალღამტარში გავრცელებული ტალღის მინიმალური სიხშირე?	1.0 pt.

ამოცანა 2

სითხე-გაზის ფაზური გადასვლები (10 ქულა)

იდეალური გაზების თეორიაში მოლეკულებს შორის ურთიერთქმედება უგულებელყოფილია, ამიტომ იდეალური გაზის განტოლებები, რაღა თქმა უნდა, ვერ მოგვცემენ სითხეში ფაზური გადასვლების მოვლენის რაიმე ფორმით აღწერას, რადგან სითხის მოლეკულების დინამიკაში ურთიერთქმედების ძალები განმსაზღვრელ ფაქტორს წარმოადგენს. პირველი ცდა, რომ რამენაირად გათვალისწინებულ ყოფილიყო რეალური გაზების თვისებები, დანიელ ფიზიკოს ვან დერ ვაალსის (Johannes Diderik van der Waals)



ნახატი 1: მოლეკულათაშორისი ურთიერთქმედების პოტენციური ენერგიის დამოკიდებულება მოლეკულებთან ცენტრებს შორის მანძილზე.

ეკუთვნის. რეალური გაზების აღმწერი განტოლება მან 1873 წელს დაწერა და ამ ამოცანის მიზანია შევისწავლოთ ამ განტოლებიდან გამომდინარე სითხე-გაზის ფაზური გადასვლის მექანიზმი და წონასწორობის პირობები. ვან დერ ვაალსის განტოლება ბევრ მიახლოებას შეიცავს, ამიტომ რაოდენობრივად რეალურ ექსპერიმენტალურ მონაცემებთან მაინცადამაინც კარგ თანხვედრაში არ არის, მაგრამ ხარისხობრივად სწორად აღწერს პროცესს და სითხე-გაზის ფაზური გადასვლების მთელი ფიზიკაც ამ განტოლების საფუძველზე შეიძლება აღიწეროს.

ნაწილი A: ვან დერ ვაალსის კოეფიციენტების გამოთვლა (2.0 ქულა)

ნახატ 1-ზე წარმოდგენილი წვრილი მრუდი აღწერს ნივთიერების მოლეკულური ველის პოტენციური ენერგიის დამოკიდებულებას მოლეკულების ცენტრებს შორის მანძილზე, ხოლო ტყვიანი მსხვილი ხაზი არის ამ პოტენციური ენერგიის მიახლოებითი ფორმა, რასაც გამოვიყენებთ ჩვენს შემდგომ მსჯელობაში, კერძოდ კი, მარცხენა მხარე წარმოადგენს უსასრულო პოტენციურ კედელს, რაც ნიშნავს, რომ მოლეკულის ცენტრებს შორის r_1 -ზე ნაკლებ მანძილზე მიახლოება შეუძლებელია უსასრულო განზიდვის ძალის გამო, მიზიდვა კი ხორციელდება $r_1 < r < r_0$ მანძილებზე მოლეკულის ცენტრებს შორის ერთნაირი $-\epsilon_0$ პოტენციური ენერგიით, ხოლო $r > r_0$ მანძილებზე მოლეკულის ველი ნულის ტოლია. ამ მონაცემების გამოყენებით შევეცადოთ ვან დერ ვაალსის განტოლების კოეფიციენტების გამოთვლას. განტოლება კი რეალური გაზის ერთი მოლისთვის შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (1)$$

სადაც P, V, T ერთი მოლი გაზის წნევა, მოცულობა და ტემპერატურაა. პირველ ყოვლისა აღვნიშნოთ, რომ ახლა მოლეკულებს სამოძრაოდ ნაკლები სივრცე აქვთ ვიდრე ჭურჭლის V მოცულობაა, ვინაიდან ისინი ვერ აღწევენ მეზობელი მოლეკულების შიგნით.

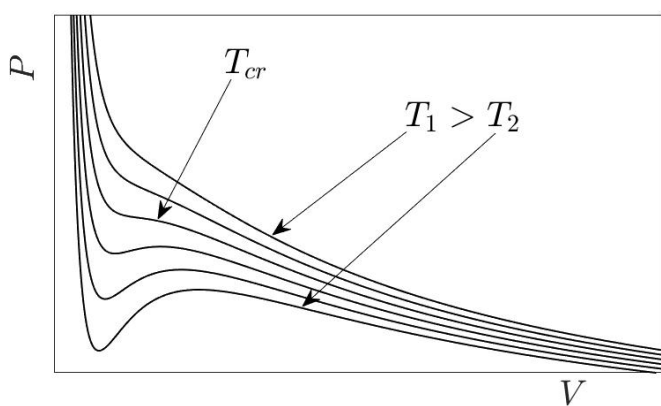
A.1	გამოითვალეთ ვან დერ ვაალსის (1) განტოლების b კოეფიციენტი როგორაა დამოკიდებული r_1 -ზე და N_A ავოგადროს რიცხვზე.	1.0 pt.
------------	---	----------------

გადავიდეთ a კოეფიციენტის გამოთვლაზე შემდეგი მსჯელობის გამოყენებით: მოლეკულის მიზიდვის ველში აღმოჩნდება ის მოლეკულები, რომლებიც მისი ცენტრიდან დაშორებულია არაუმეტეს r_0 მანძილისა, თან რადგან გვაქვს პირობა $r_0 \gg r_1$, ვთვლით რომ ყველა მოლეკულა, რომელიც r_0 რადიუსის სფეროს შიგნითაა $-\varepsilon_0$ ენერგიით ხასიათდება.

A.2 გამოითვალეთ ვან დერ ვალსის (1) განტოლების a კოეფიციენტი როგორაა დამოკიდებული r_0 -ზე, ε_0 -ზე და N_A ავოგადროს რიცხვზე. **1.0 pt.**

ნაწილი B: სითხე-გაზის ფაზური გადასვლების კრიტიკული პარამეტრების გამოთვლა და ფაზების წონასწორობის პირობები. (8.0 ქულა)

განვიხილოთ ვან დერ ვალსის გაზის (1) განტოლების იზოთერმები სხვადასხვა ტემპერატურების დროს, რომლებიც



ნახატი 2: ვან დერ ვალსის (1) განტოლებით აღწერილი რეალური გაზის იზოთერმები სხვადასხვა ტემპერატურების დროს.

ნახატ 2-ზე მოცემული. იზოთერმების მარჯვენა ნაწილი იდეალური გაზის მდგომარეობის განტოლებას შეესაბამება, ხოლო მარცხენა სითხეა. იზოთერმების შუა ნაწილში კი, სადაც ფიქსირებულ წნევას მოცულობის სამი ფესვი შეესაბამება (იხილეთ ნახატი 3), გვაქვს სითხე-გაზის წონასწორობა. იზოთერმის რომელიღაც წერტილში იწყება სითხის გაზად გარდაქმნა და რომელიღაც წერტილში კი ეს პროცესი მთავრდება, ანუ მთელი სითხე გაზად გარდაიქმნება. ჩვენი ერთ-ერთი

მიზანი ამ ნაწილში ამ წერტილების მდებარეობების განსაზღვრაა. მაგრამ ჯერ განვიხილავთ, თუ რა ტემპერატურების დროს აქვს იზოთერმებს სითხე-გაზის ფაზების გადასვლის უბანი, ანუ მრუდზე როდის გვაქვს ორი ექსტრემუმი. როგორც ნახატიდან ჩანს, დიდ ტემპერატურებზე გვაქვს მონოტონური იზოთერმა ექსტრემუმების გარეშე, ამ შემთხვევაში აღარა გვაქვს გამოკვეთილად სითხის ან გაზის ფაზა და ამ ტემპერატურებზე ვეღარც ფაზურ გადასვლებზე ვისაუბრებთ.

როგორც ნახატ 2-ზე გამოსახული იზოთერმებიდან ჩანს, ყოველი კონკრეტული ტემპერატურის იზოთერმას მოცემული წნევისთვის აქვს მოცულობის მნიშვნელობისთვის აქვს ერთი ან სამი ამონახსნი. კრიტიკული იზოთერმა არის ის, რომელშიც სამი ფესვი ერთად გადაიქცევა. ასეთი იზოთერმის შესაბამის ტემპერატურას კრიტიკული ტემპერატურა ეწოდება, ხოლო იმ წერტილის შესაბამის წნევას და მოცულობას, სადაც სამი ფესვი ერთ ფესვად გარდაიქმნება, ეწოდება კრიტიკული წნევა და კრიტიკული მოცულობა.

B.1 გამოიყვანეთ კრიტიკული ტემპერატურის, მოცულობისა და წნევის დამოკიდებულება ვან დერ ვალსის (1) განტოლების a და b კოეფიციენტებზე. **3.0 pt.**

გადავიდეთ ახლა ფაზების წონასწორობის პირობებზე. ისევ ვიხილავთ ერთ მოლ ნივთიერებას. სითხე-გაზის სრული ენტროპია ჩაიწერება როგორც

$$S = \nu_1 s_1 + \nu_2 s_2 \quad (2)$$

სადაც s_1 და s_2 გაზის და სითხის ერთი მოლის კუთრი ენტროპიებია, ხოლო v_1 და v_2 გაზის და სითხის მოლების რაოდენობები. თერმოდინამიკურ წონასწორობაში ეს ენტროპია უნდა იყოს მაქსიმალური, ანუ მისი დიფერენციალი ნულის ტოლი უნდა იყოს:

$$dv_1 s_1 + dv_2 s_2 + v_1 ds_1 + v_2 ds_2 = 0 \quad (3)$$

შექცევითი პროცესის დროს (ანუ როცა ყოველ მდგომარეობაში გვაქვს თერმოდინამიკური წონასწორობა) თერმოდინამიკის პირველი კანონიდან გვაქვს: $ds_1 = p_1 dv_1 / T_1 + de_1 / T_1$ და $ds_2 = p_2 dv_2 / T_2 + de_2 / T_2$, სადაც v_1 , p_1 , T_1 , s_1 , e_1 არის ერთი მოლი გაზის მოცულობა, წნევა, ტემპერატურა, ენტროპია და ენერგია, ხოლო v_2 , p_2 , T_2 , s_2 , e_2 არის ერთი მოლი სითხის იგივე პარამეტრები. გავითვალისწინოთ ახლა ნივთიერების რაოდენობის, სრული მოცულობისა და სრული ენერგიის შენახვის კანონები, რომლებიც ჩაიწერება შემდეგნაირად:

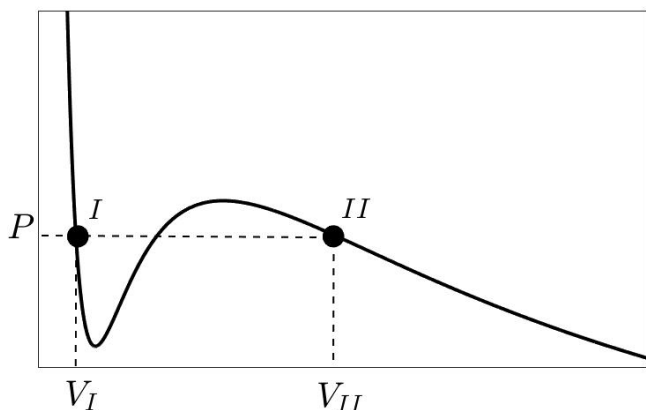
$$v_1 + v_2 = 1; \quad V = v_1 v_1 + v_2 v_2; \quad E = v_1 e_1 + v_2 e_2; \quad (4)$$

B.2 დაამტკიცეთ, რომ (2), (3) და (4) გამოსახულებებიდან გამომდინარეობს სითხე-გაზის წონასწორობის პირობები: **2.0 pt.**

$$T_1 = T_2 \equiv T; \quad p_1 = p_2 \equiv P; \quad e_1 + p v_1 - s_1 T = e_2 + p v_2 - s_2 T \equiv \mu.$$

მითითება: გამოყვანაში დაგეხმარებათ (4) შენახვის პირობების გადიფერენციალები.

სითხის და გაზის სრულად დახასიათება თავთავიანთი ტემპერატურებით და წნევებით



ნახატი 3: სითხე-გაზის ფაზური გადასვლის დიაგრამა.

შეგვიძლია, მაგრამ რადგან ვხედავთ რომ ეს წნევები და ტემპერატურები ერთნაირი აქვთ, და კიდევ მესამე პირობაცაა დადებული, გამოდის რომ სითხე-გაზის დახასიათება ერთადერთი პარამეტრით, მაგალითად T ტემპერატურით შეიძლება, ხოლო წნევა კი ამ ტემპერატურის საშუალებით გამოითვლება. რადგან ჩვენ იზოთერმულ პროცესებს ვიხილავთ, ეს ნიშნავს, რომ I წერტილში (სადაც იწყება სითხის

გაზში გადასვლა) და II წერტილში (სადაც ეს გადასვლა მთავრდება), წნევა ერთნაირია. ნახატ 3-ზე მოცემულ ამ წერტილებში ერთნაირია აგრეთვე სითხის და გაზის მახასიათებელი μ სიდიდე. თუ განვიხილავთ ახლა შემდეგ კომბინაციას

$$(e_1 + P v_1 - s_1 T) v_1 + (e_2 + P v_2 - s_2 T) v_2$$

ეს იქნება μ -ს ტოლი, რადგან გვაქვს ერთი მოლი ნივთიერება $v_1 + v_2 = 1$. ამიტომ გვქვია $E + PV - ST = \mu$ და რადგან μ ერთნაირია I და II წერტილებში, $E + PV - ST$ სიდიდეც ერთიდაიგივე იქნება.

B.3 გამოიყვანეთ I და II წერტილების შესაბამისი V_I და V_{II} მოცულობების დამაკავშირებელი ორი განტოლება $f_1[V_I, V_{II}] = 0$ და $f_2[V_I, V_{II}] = 0$, რომლების რიცხვითი ამოხსნა საშუალებას იძლევა განვსაზღვროთ სითხე-გაზის ფაზური გადასვლის წერტილები იზოთერმული პროცესის დროს, თუ **1.5 pt.**

მოცემულია ტემპერატურა და ვან დერ ვაალსის გაზის a და b კოეფიციენტები.

მითითება: გამოიყენეთ თერმოდინამიკის პირველი კანონი მთლიანი ერთ მოლიანი გაზი-სითხე სისტემისთვის და აგრეთვე ვან დერ ვაალსის განტოლება (1).

ახლა შევისწავლოთ ნაჯერი ორთქლის წნევის ტემპერატურაზე დამოკიდებულება, ესე იგი უკვე აღარ შემოვიფარგლებით იზოთერმული პროცესით. მაგრამ ამ ფორმულის

$$e_1 + pv_1 - s_1T = e_2 + pv_2 - s_2T$$

გამოსაყვანად ტემპერატურის მუდმივობა არსად გამოგვიყენებია და ამიტომ თავისუფლად შეგვიძლია განვიხილოთ.

B.4 განვიხილოთ შექცევადი პროცესი (ანუ გაზი-სითხე სისტემა **1.5 pt.** თერმოდინამიკურ წონასწორობაშია) და გამოიყვანეთ კლაპეირონ-კლაუზიუსის განტოლება, ანუ ჩაწერეთ dT/dP -ს დამოკიდებულება სითხის v_1 და გაზის v_2 კუთრ მოცულობებზე, T ტემპერატურაზე და $\lambda(T)$ ორთქლადქცევის კუთრ სითბოზე (ეს არის სითბოს რაოდენობა, რომელიც საჭიროა ერთი მოლი სითხის ასაორთქლებლად მოცემული ტემპერატურის დროს).

ამოცანა 3

შრედინგერის განტოლება (10 ქულა)

კლასიკური მექანიკისაგან განსხვავებით კვანტურ მექანიკაში ნაწილაკის ზუსტი მდებარეობის დადგენა შეუძლებელია. სამაგიეროდ ჩვენ შეგვიძლია დავითვალოთ ნაწილაკის სივრცის რაიმე არეში ყოფნის ალბათობა. ამის გასაკეთებლად ჩვენ გვჭირდება შრედინგერის განტოლება, რომელიც ერთ განზომილებიანი მოძრაობისათვის მოიცემა შემდეგნაირად:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + (V(x) - E)\psi(x) = 0$$

სადაც $\hbar \approx 1.055 \cdot 10^{-34}$ კგ მ² წმ⁻¹ არის პლანკის მუდმივა, m არის ნაწილაკის მასა, E არის ნაწილაკის მუდმივი სრული ენერგია, $V(x)$ არის ნაწილაკის კოორდინატზე დამოკიდებული პოტენციური ენერგია, $\psi(x)$ წარმოადგენს ეგრეთ-წოდებულ ტალღურ ფუნქციას, $\psi''(x)$ კი მისი კოორდინატით მეორე წარმოებულია. ტალღური ფუნქციის მოდულის კვადრატია არის ალბათობის სიმკვრივე: $\rho(x) = |\psi(x)|^2$. იმის ΔP ალბათობა რომ ნაწილაკი იმყოფებოდეს სივრცის $(x, x + \Delta x)$ შუალედში მოიცემა შემდეგნაირად:

$$\Delta P = \rho(x)\Delta x$$

სადაც ΔP და Δx უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია.

ნაწილი A: უსასრულო პოტენციური ორმო (1.0 ქულა)

დავუშვათ რომ m მასის და E ენერგიის მქონე ნაწილაკს შეუძლია მხოლოდ x ღერძის გასწვრივ მოძრაობა და იმყოფება ორ შეუვალ კედელს შორის, რომლებიც მდებარეობენ $x = 0$ და $x = a$ კოორდინატებში. კლასიკურ შემთხვევაში ნაწილაკი კედლებს შორის აქეთ-იქეთ იმოძრაავდა მუდმივი სიჩქარით. კვანტური შემთხვევის შესასწავლად კი შრედინგერის განტოლების ამოხსნაა საჭირო. ასეთი სიტუაციის მოდელირება შეიძლება შემდეგი სახის პოტენციური ენერგიით:

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & \text{თუ } x \leq 0 \\ 0, & \text{თუ } 0 < x < a \\ \infty, & \text{თუ } x \geq a \end{cases}$$

უსასრულო პოტენციური ენერგიის არეში (ანუ კედლების გარეთ) ნაწილაკის ყოფნის ალბათობა 0-ის ტოლია, ამიტომ ტალღური ფუნქცია შეგვიძლია ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_2(x) = 0, & \text{თუ } x \leq 0 \\ \psi_1(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx), & \text{თუ } 0 < x < a \\ \psi_2(x) = 0, & \text{თუ } x \geq a \end{cases}$$

A.1 იპოვეთ k -ს რა მნიშვნელობისათვის დააკმაყოფილებს $\psi_1(x)$ **0.2 pt.** შრედინგერის განტოლებას. პასუხი გამოსახეთ m , E და $\hbar$ სიდიდეებით.

$\psi(x)$ ტალღური ფუნქცია მთელ არეში უწყვეტი უნდა იყოს. ამ პირობის გამოყენებით

შეიძლება ჩვენება რომ E ენერგია ნებისმიერი ვერ იქნება და მხოლოდ დისკრეტული მნიშვნელობების მიღება შეუძლია. კონკრეტულად $E = E_0 n^2$, სადაც n ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

A.2	იპოვეთ E_0 . პასუხი გამოსახეთ m , a და $\hbar$ სიდიდეებით.	0.3 pt.
A.3	იმის გათვალისწინებით, რომ მთლიან შუალედში ნაწილაკის ყოფნის ალბათობა უნდა იყოს 1-ის ტოლი, მიიღეთ $\psi_1(x)$ ტალღური ფუნქციის საბოლოო სახე. პასუხი გამოსახეთ a , n და x სიდიდეებით.	0.4 pt.
A.4	რიცხოვრივად გამოთვალეთ უმცირესი არანულოვანი ენერგიის მქონე ნაწილაკის $\left(0, \frac{a}{4}\right)$ შუალედში ყოფნის ალბათობა.	0.1 pt.

ნაწილი B: ჰარმონიული ოსცილატორი (4.0 ქულა)

k სიხისტის მქონე ზამბარაზე მიმაგრებული m მასის სხეული კლასიკურ შემთხვევაში ჰარმონიულად ირხევა სასრულ შუალედში. კვანტური შემთხვევისათვის შრედინგერის განტოლებაში უნდა ჩავსვათ ზამბარის პოტენციური ენერგია:

$$V(x) = \frac{kx^2}{2}$$

რადგან ეს ენერგია ყველგან სასრულია, ნაწილაკს ნებისმიერ კოორდინატზე აქვს ყოფნის რაღაც ალბათობა, მაგრამ ეს ალბათობა უსასრულობაში ორივე მხარეს ნულისკენ უნდა მიისწრაფოდეს. ამიტომ მინიმალური ენერგიის შესაბამისი ტალღური ფუნქცია შეგვიძლია ვეძებოთ $\psi(x) = e^{-\alpha x^2}$ სახით

B.1	იპოვეთ α კოეფიციენტი და ამ ტალღური ფუნქციის შესაბამისი ენერგია. პასუხები გამოსახეთ m , k და $\hbar$ სიდიდეებით.	1.1 pt.
------------	--	----------------

დანარჩენი ენერგიების შესაბამისი ტალღური ფუნქციები შეგვიძლია ვეძებოთ $\psi(x) = f(x)e^{-\alpha x^2}$ სახით, სადაც α იგივეა რაც წინა პუნქტში ხოლო $f(x)$ კი საძიებელი ფუნქციაა. ამ ტალღური ფუნქციის შრედინგერის განტოლებაში ჩასმით შეიძლება ვაჩვენოთ რომ $f(x)$ უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$f''(x) + Ax f'(x) + Bf(x) = 0$$

სადაც A და B მუდმივებია

B.2	იპოვეთ A და B მუდმივები. პასუხები გამოსახეთ m , k , E და $\hbar$ სიდიდეებით.	0.8 pt.
------------	--	----------------

ამ დიფერენციალური განტოლების ამოსახსნელად $f(x)$ ფუნქცია შეგვიძლია ვეძებოთ პოლინომის სახით:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ამ პოლინომმა დიფერენციალური განტოლება რომ დააკმაყოფილოს აუცილებელია რომ კოეფიციენტები აკმაყოფილებდნენ შემდეგ რეკურენტულ პირობას:

$$a_{n+2} = C_n a_n$$

B.3 იპოვეთ C_n . პასუხი გამოსახეთ A , B და n სიდიდეებით.

1.4 pt.

როგორც აღმოჩნდა ეს პოლინომი უსასრულო რომ იყოს იგი e^{ax^2} -ზე სწრაფად გაიზრდებოდა, რაც ნიშნავს რომ ტალღური ფუნქცია უსასრულობაში 0-სკენ არ მიისწრაფვის. ეს კი შეუძლებელია რადგან ტალღური ფუნქციის კვადრეტი ალბათობის სიმკვრივეა. პოლინომის სასრულობისათვის აუცილებელი პირობაა რომ რაიმე n -სათვის C_n გახდეს 0-ის ტოლი.

B.4 იპოვეთ E ენერგიის ის მნიშვნელობა რომლისთვისაც $C_n = 0$. პასუხი გამოსახეთ m , k , n და $\hbar$ სიდიდეებით. **0.2 pt.**

B.5 იპოვეთ ის ტალღური ფუნქცია, რომელიც ენერგიის ყველაზე მცირე არამინიმალურ ენერგიას შეესაბამება. პასუხი გამოსახეთ m , k , $\hbar$ და x სიდიდეებით. **0.5 pt.**

შენიშვნა: შესაძლოა დაგჭირდეთ შემდეგი ინტეგრალი:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ნაწილი C: დირაკის პოტენციალი (5 ქულა)

განვიხილოთ პოტენციური ენერგია რომელიც საკოორდინატო ღერძს ორ ნაწილად ყოფს:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \leq \frac{d}{2} \\ \frac{g}{d}, & \text{თუ } -\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} \\ 0, & \text{თუ } x \geq \frac{d}{2} \end{cases}$$

როდესაც d მიისწრაფვის ნულისკენ ასეთ ფუნქციას დირაკის დელტა ფუნქცია ეწოდება. ანუ ზღვარში უსასრულოდ პატარა არეზე არის უსასრულოდ დიდი პოტენციური ენერგია. დავუშვათ $E > 0$ ენერგიის და m მასის მქონე ნაწილაკი მოდის უარყოფითი არიდან დადებითისაკენ. როდესაც იგი სათავესთან მივა, შეიძლება აირეკლოს და უკან წამოვიდეს ან დადებით მხარეში გადავიდეს და იგივე მიმართულებით გააგრძელოს მოძრაობა. თავისუფალი (ანუ ნულოვანი პოტენციური ენერგიის მქონე არეში მოძრავი ნაწილაკის) მარჯვნივ მოძრავი ნაწილაკის ტალღური ფუნქცია მოიცემა $\psi(x) = Ae^{ikx}$ სახით, ხოლო მარცხნივ მოძრავის კი $\psi(x) = Ae^{-ikx}$ სახით. შესაბამისად მოცემული პოტენციური ენერგიისათვის ტალღური ფუნქცია იქნება:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_-(x) = \psi_A(x) + \psi_B(x), & \text{თუ } x \leq 0 \\ \psi_+(x) = \psi_C(x), & \text{თუ } x \geq 0 \end{cases}$$

სადაც $\psi_A(x) = Ae^{ikx}$, $\psi_B(x) = Be^{-ikx}$ და $\psi_C(x) = Ce^{ikx}$. A , B და C მუდმივი კომპლექსური

რიცხვებია, ხოლო k კი მუდმივი დადებითი რიცხვი. შეგახსენებთ რომ $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$.

C.1 იპოვეთ k სიდიდე. პასუხი გამოსახეთ m , E და $\hbar$ სიდიდეებით. **0.1 pt.**

$\psi(x)$ ტალღური ფუნქცია უწყვეტი უნდა იყოს, ანუ $\psi_-(0) = \psi_+(0)$. მაგრამ იმის გამო რომ $x = 0$ -ში უსასრულოდ მცირე არეზე არის უსასრულოდ დიდი პოტენციური ენერგია, $\psi(x)$ -ის წარმოებული უწყვეტი არ იქნება, ანუ $\psi'_+(0)$ -ს და $\psi'_-(0)$ -ს ექნებათ განსხვავებული მნიშვნელობები და დააკმაყოფილებენ შემდეგ გამოსახულებას

$$\psi'_+(0) - \psi'_-(0) = D\psi(0)$$

C.2 იპოვეთ D . პასუხი გამოსახეთ m , g და $\hbar$ სიდიდეებით. **1.5 pt.**

C.3 უწყვეტობის და წარმოებულებს შორის კავშირის გამოყენებით **0.6 pt.** გამოსახეთ B და C სიდიდეები A , g , m , E და $\hbar$ სიდიდეების გამოყენებით.

მოძრავი თავისუფალი ნაწილაკისათვის ალბათობის სიმკვრივის დათვლას აზრი არ აქვს, რადგან მისი ნებისმიერ ადგილზე ყოფნის ალბათობა ერთნაირია. ამიტომ გამოიყენება ალბათობის დენი, რომელიც აღწერს რაიმე წერტილში ალბათობის გადინების სიჩქარეს და გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$J = \frac{i\hbar}{2m} (\psi(x)\psi'^*(x) - \psi'(x)\psi^*(x))$$

სადაც $\psi^*(x)$ არის $\psi(x)$ ფუნქციის კომპლექსურად შეუღლებული (შეგახსენებთ რომ $c = a + bi$ კომპლექსური რიცხვის კომპლექსურად შეუღლებული არის $c^* = a - bi$). P_1 იყოს იმის ალბათობა რომ ნაწილაკი აირეკლება და უკან წამოვა, ხოლო P_2 კი იმის ალბათობა რომ ნაწილაკი მოძრაობას იგივე მიმართულებით გააგრძელებს. მაშინ ამ ალბათობების დათვლა შეგვიძლია ალბათობის დენით შემდეგნაირად:

$$P_1 = \left| \frac{J_B}{J_A} \right|$$

$$P_2 = \left| \frac{J_C}{J_A} \right|$$

სადაც J_A , J_B და J_C არიან შესაბამისად $\psi_A(x)$, $\psi_B(x)$ და $\psi_C(x)$ ტალღური ფუნქციებით დათვლილი ალბათობის დენები.

C.4 იპოვეთ P_1 და P_2 . პასუხები გამოსახეთ g , m , E და $\hbar$ სიდიდეების **0.5 pt.** გამოყენებით.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა როცა ნაწილაკის E ენერგია უარყოფითია. ამ შემთხვევაში ნაწილაკის ტალღური ფუნქცია შეგვიძლია ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_-(x) = Ae^{kx}, & \text{თუ } x \leq 0 \\ \psi_+(x) = Be^{-kx}, & \text{თუ } x \geq 0 \end{cases}$$

სადაც k დადებითი მუდმივაა.

C.5	ტალღური ფუნქციის უწყვეტობისა და წარმოებულების კავშირის გამოყენებით იპოვეთ ნაწილაკის E ენერგია g , m და $\hbar$ სიდიდეების საშუალებით. g -ს რა მნიშვნელობებისთვისაა შესაძლებელი ამ ენერგიის მქონე ნაწილაკის არსებობა?	1.5 pt.
C.6	იპოვეთ წინა პუნქტში მიღებული ენერგიის მქონე ნაწილაკის $\psi_-(x)$ და $\psi_+(x)$ ტალღური ფუნქციები. პასუხები გამოსახეთ g , m , $\hbar$ და x სიდიდეებით.	0.8 pt.