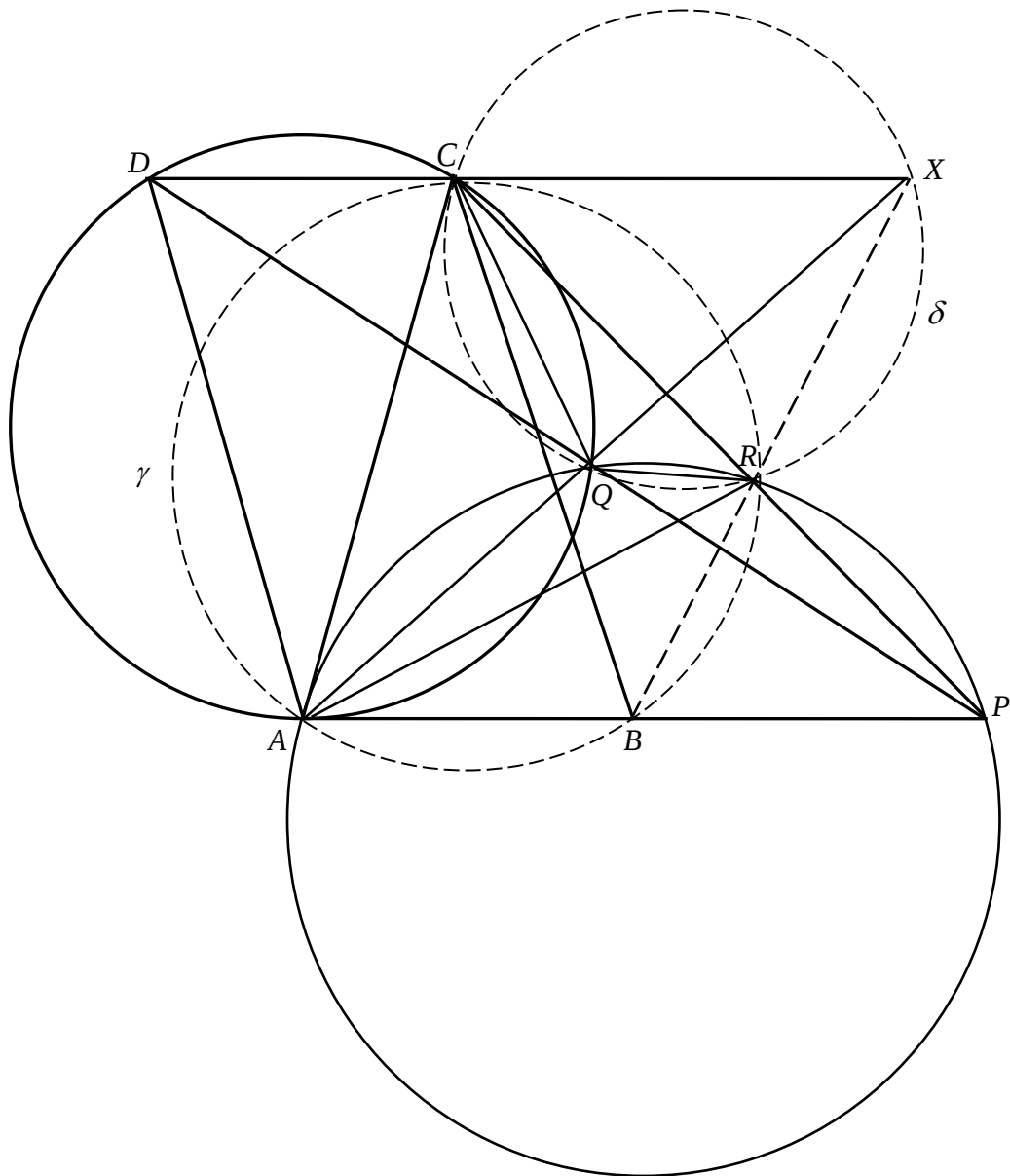


I და II ტურის ამოცანები ამოხსნებით
და შეფასების სქემებით

ამოცანა 1. ვთქვათ $ABCD$ პარალელოგრამში $AC = BC$. წერტილი P აღებულია AB მონაკვეთის გაგრძელებაზე B წერტილის მხარეს. ACD სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი PD მონაკვეთს მეორედ კვეთს Q წერტილში, ხოლო APQ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი PC მონაკვეთს მეორედ კვეთს R წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ CD , AQ და BR წრფეები იკვეთება ერთ წერტილში.

ამოხსნა



ვინაიდან $AC = BC = AD$, ამიტომ $\angle ABC = \angle BAC = \angle ACD = \angle ADC$. ცხადია, რომ $APRQ$ და $AQCD$ ოთხკუთხედები ციკლურია, ამიტომ

$$\angle CRA = 180^\circ - \angle ARP = 180^\circ - \angle AQP = \angle DQA = \angle DCA = \angle CBA.$$

ამრიგად A, B, C, R წერტილები რაღაც γ წრეწირზე მდებარეობენ.

ვთქვათ $X = AQ \cap CD$. უნდა დავამტკიცოთ, რომ B, R და X წერტილები ერთ წრეზე მდებარეობს. $APRQ$ ოთხკუთხედის ციკლურობიდან ვიღებთ

$\angle RQX = 180^\circ - \angle AQR = \angle RPA = \angle RCX$, რაც ნიშნავს, რომ C, Q, R, X წერტილები რაღაც δ წრეწირზე მდებარეობენ.

δ და γ წრეწირებიდან ჩანს, რომ

$$\angle XRC = \angle XQC = 180^\circ - \angle CQA = \angle ADC = \angle BAC = 180^\circ - \angle CRB,$$

ამიტომ B, R და X წერტილები ერთ წრეზე მდებარეობს. ამრიგად CD , AQ და BR წრეები იკვეთება ერთ წერტილში

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ $\angle CRA = \angle DQA$;

ბ) დაადგინა, რომ $\angle CRA = \angle CBA$;

გ) დაადგინა, რომ A, B, C, R წერტილები რაღაც γ წრეწირზე მდებარეობენ;

დ) განიხილა $X = AQ \cap CD$ წერტილი და აღნიშნა, რომ B, R და X წერტილების ერთ წრეზე მდებარეობაა დასამტკიცებელი.

ე) დაადგინა, რომ C, Q, R, X წერტილები რაღაც δ წრეწირზე მდებარეობენ;

ვ) დაადგინა, რომ $\angle XRC = 180^\circ - \angle CQA$;

ზ) მიიღო $\angle XRC = 180^\circ - \angle CRB$ და დაასრულა დამტკიცება.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)

2 ქ- ა), ბ)

3 ქ- ა), ბ), გ)

4 ქ- ა), ბ), გ), დ)

5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)

6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 2. ყოველი $n \geq 1$ ნატურალური რიცხვისთვის განვიხილოთ $n \times n$ ცხრილი. ცხრილის i -ური სტრიქონისა და j -ური სვეტის გადაკვეთის უჯრაში ჩავწეროთ რიცხვი $\left\lfloor \frac{i \cdot j}{n+1} \right\rfloor$ ყოველი $i = 1, 2, \dots, n$ და ყოველი $j = 1, 2, \dots, n$ რიცხვებისათვის. იპოვეთ ყველა ისეთი $n \geq 1$ ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც შესაბამისი $n \times n$ ცხრილის n^2 ცალ უჯრაში ჩაწერილი რიცხვების ჯამი იქნება $\frac{1}{4}n^2(n-1)$.
(ჩანაწერი $[a]$ აღნიშნავს უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც არ აღემატება a -ს)

ამოხსნა

შევნიშნოთ, რომ თუ x და y ნამდვილი რიცხვები ისეთია, რომ $x + y$ არის მთელი, მაშინ სამართლიანია უტოლობა $[x] + [y] \geq x + y - 1$. ამასთან, თუ x და y რიცხვები მთელი რიცხვებია, ადგილი აქვს მკაცრ უტოლობას, წინააღმდეგ შემთხვევაში ადგილი აქვს ტოლობას.

ახლა შევაფასოთ $n \times n$ ცხრილის n^2 ცალ უჯრაში ჩაწერილი რიცხვების S ჯამი. გვაქვს

$$2S = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\left\lfloor \frac{i \cdot j}{n+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{i \cdot j}{n+1} \right\rfloor \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\left\lfloor \frac{i \cdot j}{n+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(n+1-i) \cdot j}{n+1} \right\rfloor \right) \geq \sum_{1 \leq i, j \leq n} (j-1) = \frac{1}{2}n^2(n-1).$$

ამ შეფასებაში ვისარგებლეთ იმ ფაქტით, რომ რიცხვი $\frac{i \cdot j}{n+1} + \frac{(n+1-i) \cdot j}{n+1} = j$ არის მთელი და გამოვიყენეთ ზემოთ მოყვანილი უტოლობა.

ამრიგად, $S = \frac{1}{4}n^2(n-1)$ ტოლობა შესრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$2S$ -ის ზემოთ მოყვანილ შეფასებაში $\geq$ უტოლობაში ადგილი ექნება ტოლობას, რაც იმას ნიშნავს, რომ $\frac{i \cdot j}{n+1}$ რიცხვებიდან არცერთი არ უნდა იყოს მთელი. ამიტომ თუ $n+1$ არის შედგენილი რიცხვი და გვაქვს $n+1 = ab$, $2 \leq a, b \leq n$, მაშინ $i = a$ და $j = b$ შემთხვევაში $\frac{i \cdot j}{n+1}$ მთელია, ამიტომ $2S$ -ის ზემოთ მოყვანილ შეფასებაში $\geq$

უტოლობაში ადგილი ექნება მკაცრ უტოლობას. მაგრამ, თუ $n+1$ არის მარტივი რიცხვი, მაშინ $\frac{i \cdot j}{n+1}$ რიცხვი არასდროს არ იქნება მთელი და ამიტომ შესრულდება

$S = \frac{1}{4}n^2(n-1)$ ტოლობა.

პასუხი: ყველა ნატურალური რიცხვი n , რომლისთვისაც $n+1$ არის მარტივი.

ამოხსნის ეტაპები

ა) აღნიშნა, რომ თუ $x+y$ არის მთელი, მაშინ სამართლიანია უტოლობა

$$[x] + [y] \geq x + y - 1;$$

ბ) წარმოადგინა უჯრებში ჩაწერილი რიცხვების S ჯამი შემდეგი სახით:

$$2S = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\left[\frac{i \cdot j}{n+1} \right] + \left[\frac{(n+1-i) \cdot j}{n+1} \right] \right);$$

გ) მიიღო $2S \geq \sum_{1 \leq i, j \leq n} (j-1);$

დ) მიიღო $2S \geq \frac{1}{2} n^2 (n-1);$

ე) აღნიშნა, რომ $S = \frac{1}{4} n^2 (n-1)$ ტოლობა შესრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ,

როდესაც $2S$ -ის შეფასებაში $\geq$ უტოლობაში ადგილი ექნება ტოლობას, რაც იმას ნიშნავს, რომ $\frac{i \cdot j}{n+1}$ რიცხვებიდან არცერთი არ უნდა იყოს მთელი.

ვ) შენიშნა, რომ თუ $n+1$ არის შედგენილი რიცხვი, მაშინ $\frac{i \cdot j}{n+1}$ შესაძლებელია იყოს

მთელი და $S = \frac{1}{4} n^2 (n-1)$ ტოლობა არ შესრულდება;

ზ) მიიღო პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)

2 ქ- ა), ბ)

3 ქ- ა), ბ), გ)

4 ქ- ა), ბ), გ), დ)

5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)

6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 3. ვთქვათ $n \geq 3$ მთელი რიცხვია და ვთქვათ $C_1, C_2, \dots, C_n$ აღნიშნავს n ერთმანეთისაგან განსხვავებულ ფერს. ყოველი i -სთვის, $1 \leq i \leq n$, მოცემული გვაქვს C_i ფერის ბურთების უსასრულო რაოდენობა.

მთელ რიცხვს m -ს, სადაც $m \geq n + 1$ -ზე, ვუწოდოთ n -ფერადი, თუ შესაძლებელია მოცემული ბურთებიდან ამოვარჩიოთ m ცალი ბურთი და დავალაგოთ წრეწირის გასწვრივ ისე, რომ ყოველ $n + 1$ ცალ ერთმანეთის მომდევნო ბურთში, ყოველი i -სთვის, $1 \leq i \leq n$, გვქონდეს ერთი მაინც C_i ფერის ბურთი.

იპოვეთ უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც არ არის n -ფერადი.

ამოხსნა

ვაჩვენოთ, რომ ამოცანის პასუხია $m = n^2 - n - 1$. განვიხილოთ ნებისმიერი m ცალი ბურთი მოცემული ბურთებიდან. მაშინ არსებობს ერთი მაინც ფერი, მაგალითად ლურჯი, რომ არაუმეტეს $n - 2$ ბურთი იქნება ლურჯი ფერის. ამ $n - 2$ ლურჯი ბურთით, წრეწირზე განლაგებული დანარჩენი $n^2 - 2n + 1$ ბურთი იყოფა არაუმეტეს $n - 2$ ჯგუფად. ამიტომ იარსებებს ჯგუფი, რომელშიც სულ მცირე $n + 1$ ცალი ბურთი იქნება და რადგანაც ეს ერთმანეთის მომდევნო $n + 1$ ბურთი არ შეიცავს ლურჯი ფერის ბურთს, ამიტომ რიცხვი $m = n^2 - n - 1$ არ არის n -ფერადი.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $n^2 - n - 1$ -ზე დიდი ნებისმიერი რიცხვი არის n -ფერადი. ნებისმიერი რიცხვი, რომელიც მეტია ან ტოლი $n^2 - n$ -ზე, შეგვიძლია ჩავწეროთ $nk + j$ სახით, სადაც $k \geq n - 1$ და $0 \leq j \leq n - 1$. ახლა თუ წრეწირზე განვალაგებთ $[1, 2, \dots, n]$ ფერთა მიმდევრობის $k - j$ ცალ ასლს, რომლებსაც მოყვება $[1, 1, 2, \dots, n]$ ფერთა მიმდევრობის j ცალი ასლი, მივიღებთ ბურთების ისეთ განლაგებას, რომელშიც ყოველი $n + 1$ მომდევნო ბურთი შეიცავს ნებისმიერი ფერის ერთ ბურთს მაინც. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

პასუხი: $n^2 - n - 1$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) მიხვდა, რომ ამოცანის პასუხია $m = n^2 - n - 1$;

ბ) შენიშნა, რომ ნებისმიერი m ბურთიდან, არაუმეტეს $n - 2$ ბურთს ექნება ერთი და იგივე ფერი, მაგალითად ლურჯი;

გ) აღნიშნა, რომ არალურჯი ფერის $n^2 - 2n + 1$ ბურთი, ლურჯი ფერის ბურთებით იყოფა არაუმეტეს $n - 2$ ჯგუფად;

დ) აჩვენა, რომ არსებობს ჯგუფი, რომელშიც სულ მცირე $n + 1$ ცალი არალურჯი ფერის ბურთია, ანუ აჩვენა, რომ ამოცანის პასუხი მეტია ან ტოლი ვიდრე $n^2 - n - 1$;

ე) განიხილა $n^2 - n - 1$ -ზე დიდი რიცხვი და ჩაწერა $nk + j$ სახით, სადაც $k \geq n - 1$ და $0 \leq j \leq n - 1$;

ვ) წრეწირზე განალაგა $[1, 2, \dots, n]$ ფერთა მიმდევრობის $k - j$ ცალ ასლი და $[1, 1, 2, \dots, n]$ ფერთა მიმდევრობის j ცალ ასლი;

ზ) შენიშნა, რომ ყოველი $n + 1$ მომდევნო ბურთი შეიცავს ნებისმიერი ფერის ერთ ბურთს მაინც და დაამტკიცა, რომ ამოცანის პასუხია $n^2 - n - 1$.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)

2 ქ- ა), ბ)

3 ქ- ა), ბ), გ)

4 ქ- ა), ბ), გ), დ)

5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)

6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 4. ვთქვათ S არის მთელ დადებით რიცხვთა რაიმე უსასრულო სიმრავლე. ცნობილია, რომ S -ში არსებობს ოთხი წყვილ-წყვილად ერთმანეთისაგან განსხვავებული რიცხვი a, b, c და d ისეთი, რომ $\text{უსგ}(a, b) \neq \text{უსგ}(c, d)$. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს S -სიმრავლის სამი წყვილ-წყვილად ერთმანეთისაგან განსხვავებული x, y, z რიცხვი, რომ სრულდება შემდეგი: $\text{უსგ}(x, y) = \text{უსგ}(y, z) \neq \text{უსგ}(z, x)$.

(შენიშვნა. $\text{უსგ}(r, t)$ აღნიშნავს r და t მთელი რიცხვების უდიდეს საერთო გამყოფს.)

ამოხსნა

განვიხილოთ სრული გრაფი G , რომლის წვეროები არის S სიმრავლის ელემენტები. ყოველი ორი წვერო $\{s, t\}$ შევაერთოთ წიბოთი, რომლის ფერია $c(s, t) := \text{უსგ}(s, t)$. ცხადია, რომ ყოველი წვეროდან გამოდის მხოლოდ სასრული რაოდენობა ფერის წიბოები. პირობის თანახმად, გრაფში ორი მაინც ერთმანეთისაგან განსხვავებული ფერის წიბო გვხვდება. უნდა დავამტკიცოთ, რომ გრაფში გვხვდება ორ-ფერა სამკუთხედი, ანუ ისეთი სამკუთხედი, რომლის გვერდები ზუსტად ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ფერით არის შეღებილი.

განვიხილოთ წვერო v რომლიდანაც ორი მაინც განსხვავებული ფერის წიბო გამოდის. ვთქვათ X არის S სიმრავლის უსასრულო ქვესიმრავლე ისეთი, რომ $c(v, x) \equiv c_1$ ყოველი $x \in X$. ვთქვათ $y \in S$ არის ისეთი წვერო, რომ $c(v, y) \neq c_1$. განვიხილოთ $\{x_1, x_2\} \subset X$ ისეთი, რომ $c(y, x_1) = c(y, x_2) = c_2$. თუ $c_1 = c_2$, მაშინ v, y, x_1 სამკუთხედი იქნება ორ-ფერა. თუ $c_1 \neq c_2$ მაშინ ერთი მაინც v, x_1, x_2 და y, x_1, x_2 სამკუთხედებიდან იქნება ორ-ფერა. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

ამოხსნის ეტაპები

ა) შემოიღო გრაფი G ;

ბ) შენიშნა რომ G -ში ორი მაინც განსხვავებული ფერის წიბოა, ან განიხილა $\alpha \in S$ ისეთი, რომ სიმრავლე $\{\text{უსგ}(\alpha, s) : s \in S, s \neq \alpha\}$ შეიცავს ორ ელემენტს მაინც;

გ) განიხილა S -ის უსასრულო ქვესიმრავლე X ისეთი, რომ $c(v, x) \equiv c_1$ ყოველი $x \in X$, ან შენიშნა, რომ არსებობს $d|\alpha$ ისეთი, რომ სიმრავლე $B = \{\beta \in S : \text{უსგ}(\alpha, \beta) = d\}$ უსასრულოა;

დ) განიხილა G -ს ისეთი წვერო, რომ $c(v, y) \neq c_1$, ან განიხილა $\gamma \in S$ ისეთი, რომ $\text{უსგ}(\alpha, \gamma) \neq d$;

ე) განიხილა $\{x_1, x_2\} \subset X$ ისეთი, რომ $c(y, x_1) = c(y, x_2) = c_2$, ან განიხილა ისეთი $\beta_1, \beta_2 \in B$, რომ $\text{უსგ}(\beta_1, \gamma) = \text{უსგ}(\beta_2, \gamma) = d'$;

ვ) შენიშნა, რომ თუ $c_1 = c_2$, მაშინ v, y, x_1 სამკუთხედი იქნება ორ-ფერა, ან შენიშნა, რომ თუ $d = d'$ მაშინ $\text{უსგ}(\alpha, \beta_1) = \text{უსგ}(\gamma, \beta_1) \neq \text{უსგ}(\alpha, \gamma)$;

ზ) შენიშნა, რომ თუ $c_1 \neq c_2$ მაშინ ერთი მაინც v, x_1, x_2 და y, x_1, x_2 სამკუთხედებიდან იქნება ორ-ფერა, ან შენიშნა, რომ თუ $d \neq d'$ მაშინ ან $\text{უსგ}(\alpha, \beta_1) = \text{უსგ}(\alpha, \beta_2) \neq \text{უსგ}(\beta_1, \beta_2)$, ან $\text{უსგ}(\gamma, \beta_1) = \text{უსგ}(\gamma, \beta_2) \neq \text{უსგ}(\beta_1, \beta_2)$.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)

2 ქ- ა), ბ)

3 ქ- ა), ბ), გ)

4 ქ- ა), ბ), გ), დ)

5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)

6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 5. იპოვეთ ყველა მთელი $n \geq 1$ რიცხვი, რომლისთვისაც არსებობს მთელი დადებითი რიცხვთა (a, b) წყვილი, ისეთი რომ $a^2 + b + 3$ არ იყოფა არც ერთი მარტივი რიცხვის კუბზე და სრულდება ტოლობა

$$\frac{ab+3b+8}{a^2+b+3} = n.$$

ამოხსნა

ვინაიდან $b \equiv -a^2 - 3 \pmod{a^2 + b + 3}$, ამიტომ ამოცანის პირობაში მოცემული წილადის მნიშვნელისთვის გვაქვს,

$$ab + 3b + 8 \equiv a(-a^2 - 3) + 3(-a^2 - 3) + 8 \equiv -(a + 1)^3 \pmod{a^2 + b + 3}.$$

რადგანაც $a^2 + b + 3$ არ იყოფა p^3 -ზე არცერთი მარტივი p -თვის, ამიტომ თუ $a^2 + b + 3$ ყოფს $(a + 1)^3$ -ს, მაშინ ის ყოფს ასევე $(a + 1)^2$ -საც. ვინაიდან

$0 < (a + 1)^2 < 2(a^2 + b + 3)$, ამიტომ გვაქვს $(a + 1)^2 = a^2 + b + 3$. აქედან

გამომდინარეობს ტოლობა $b = 2(a - 1)$ და $n = 2$. თუ $(a, b) = (2, 2)$, მაშინ $a^2 + b + 3 = 9$ და ვრწმუნდებით, რომ $n = 2$ მართლაც ამოცანის ამონახსნია.

პასუხი: $n = 2$

ამოხსნის ეტაპები

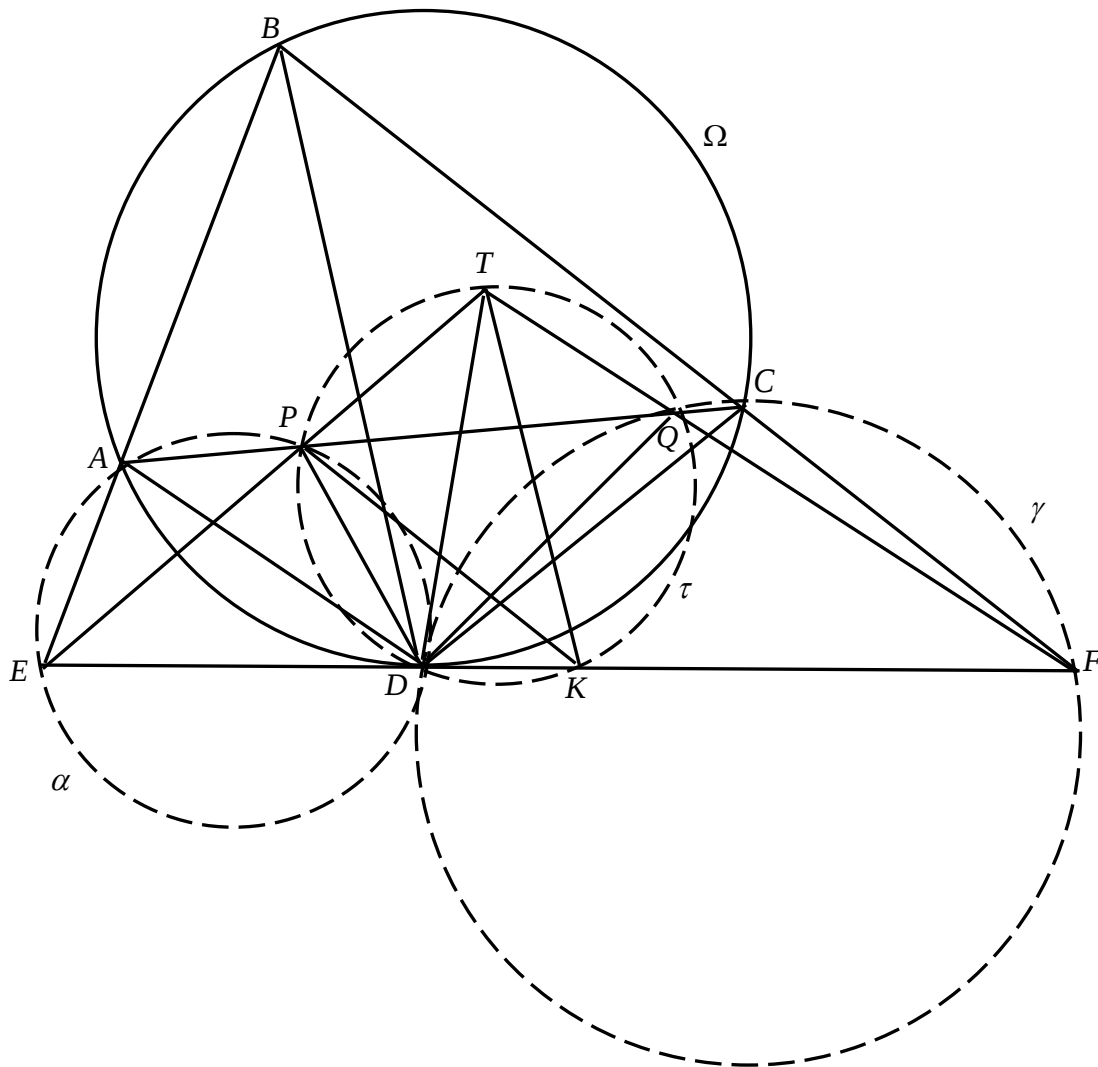
- ა) შენიშნა, რომ $ab + 3b + 8 \equiv a(-a^2 - 3) + 3(-a^2 - 3) + 8 \pmod{a^2 + b + 3}$;
- ბ) მიიღო შემდეგი სადარობა $ab + 3b + 8 \equiv (a + 1)^3 \pmod{a^2 + b + 3}$;
- გ) აღნიშნა, რომ თუ $a^2 + b + 3$ ყოფს $(a + 1)^3$ -ს, მაშინ ის ყოფს ასევე $(a + 1)^2$ -საც;
- დ) აღნიშნა, რომ მართებულია უტოლობა $(a + 1)^2 < 2(a^2 + b + 3)$;
- ე) მიიღო ტოლობა $(a + 1)^2 = a^2 + b + 3$;
- ვ) მიიღო ტოლობები $b = 2(a - 1)$ და $n = 2$;
- ზ) მოიყვანა (a, b) წყვილის მაგალითი და დაასკვნა, რომ ამოცანის პასუხია $n = 2$.

შეფასების სქემა

- 1 ქ- ა)
- 2 ქ- ა), ბ)
- 3 ქ- ა), ბ), გ)
- 4 ქ- ა), ბ), გ), დ)
- 5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
- 6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
- 7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 6. Ω წრეწირში ჩახაზულია $ABCD$ ოთხკუთხედი. Ω წრეწირისადმი D წერტილში გავლებული მხები წრფე BA და BC სხივებს კვეთს შესაბამისად E და F წერტილებში. T წერტილი აღებულია ABC სამკუთხედის შიგნით ისე, რომ TE წრფე პარალელურია CD წრფის და TF წრფე პარალელურია AD წრფის. ვთქვათ D წერტილისაგან განსხვავებული K წერტილი აღებულია DF მონაკვეთზე ისე, რომ $TD = TK$. დაამტკიცეთ, რომ AC , DT და BK წრფეები იკვეთება ერთ წერტილში.

ამოხსნა



ვთქვათ TE და TF მონაკვეთები კვეთენ AC წრფეს შესაბამისად P და Q წერტილებში. ვინაიდან TE წრფე პარალელურია CD წრფის და ED წრფე Ω წრეწირის მხებია, ამიტომ $\angle EPA = \angle DCA = \angle EDA$, რაც გვაძლევს, რომ A, P, D, E წერტილები რაღაც α წრეწირზე მდებარეობენ. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ C, Q, D, F წერტილები რაღაც γ წრეწირზე მდებარეობენ.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ TD წრფე α და γ წრეწირებს ეხება D წერტილში. მართლაც, ვინაიდან $\angle FCD + \angle EAD = 180^\circ$, ამიტომ α და γ წრეწირები ეხება ერთმანეთს D წერტილში. ასევე, შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან $\angle QFE = \angle EDA = \angle APE$, ამიტომ $PEFQ$ ოთხკუთხედი ციკლურია, საიდანაც გვექნება $TP \cdot TE = TQ \cdot TF$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ T წერტილი მდებარეობს α და γ წრეწირების D წერტილში გავლებულ საერთო მხებ წრფეზე.

ვინაიდან $TD = TK$, ამიტომ $\angle TKD = \angle TDK$. ვინაიდან TD და ED არიან შესაბამისად α და Ω წრეწირების D წერტილში გავლებული მხები წრფეები, ამიტომ გვექნება $\angle TKD = \angle TDK = \angle EAD = \angle BDE$, საიდანაც ვიღებთ, რომ $TK \parallel BD$.

ვინაიდან TD არის α წრეწირისადმი D წერტილში გავლებული მხები, ამიტომ $\angle EPD = \angle TDF = \angle TKD$, რაც ნიშნავს, რომ P წერტილი მდებარეობს TKD სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირზე. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ Q წერტილიც მდებარეობს TKD სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირზე. ამრიგად T, P, D, K, Q წერტილები რაღაც τ წრეწირზე მდებარეობენ.

τ და γ წრეწირებიდან ჩანს, რომ $\angle PKD = \angle PQD = \angle DFC$, ამიტომ $PK \parallel BC$. ამრიგად TPK და DCB სამკუთხედებს აქვთ შესაბამისად პარალელური გვერდები, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ AC , DT და BK წრფეები იკვეთება ერთ წერტილში.

ამოხსნის ეტაპები

- ა) დაადგინა, რომ $APDE$ ციკლურია;
- ბ) დაადგინა, რომ α და γ წრეწირები ეხება ერთმანეთს D წერტილში;
- გ) დაადგინა, რომ TD წრფე α და γ წრეწირებს ეხება D წერტილში;
- დ) დაადგინა, რომ $TK \parallel BD$;
- ე) დაადგინა, რომ T, P, D, K, Q წერტილები რაღაც τ წრეწირზე მდებარეობენ;
- ვ) დაადგინა, რომ $PK \parallel BC$;
- ზ) აღნიშნა, რომ TPK და DCB სამკუთხედებს აქვთ შესაბამისად პარალელური გვერდები და დაასრულა დამტკიცება.

შეფასების სქემა

- 1 ქ- ა)
- 2 ქ- ა), ბ)
- 3 ქ- ა) , ბ), გ)
- 4 ქ- ა), ბ), გ), დ)
- 5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
- 6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
- 7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)