

ამოცანა 1

მასიური სხეულის გრავიტაციულ ველში მოძრაობა (10 ქულა)

M მასის სხეულის გრავიტაციულ ველში მოძრავი $m \ll M$ მასის სხეული ემორჩილება შემდეგ მოძრაობის განტოლებას:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = - \frac{GMm}{r^3} \vec{r}$$

სადაც \vec{r} არის M და m მასის სხეულების ცენტრების შემაერთებული რადიუს ვექტორი, ხოლო $G \approx 6.6743 \cdot 10^{-11} \text{ მ}^3 \text{ კგ}^{-1} \text{ წმ}^{-2}$ არის გრავიტაციული მუდმივა. ასევე ჩათვლილია რომ M მასის სხეული უძრავია. ამ განტოლებიდან \vec{r} -ის დროზე დამოკიდებულების ჩაწერა ცნობილი ფუნქციების საშუალებით შეუძლებელია, მაგრამ შეგვიძლია მივიღოთ რომ ტრაექტორიის ფორმის განტოლება მოიცემა შემდეგნაირად:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta} \tag{1}$$

სადაც θ არის კუთხე რადიუს ვექტორსა და იმ მონაკვეთს შორის, რომელიც M მასის სხეულის ცენტრს აერთებს ტრაექტორიის მასთან უახლოეს წერტილთან (ეს წერტილი ელიფსის მაგალითზე ნახატ 1-ზე აღნიშნულია A -თი). p არის ორბიტალური პარამეტრი, ხოლო ε კი ეგრეთ-წოდებული ექსცენტრისიტეტი, რომელიც განსაზღვრავს ორბიტის ფორმას. როცა $\varepsilon = 0$ ორბიტა არის წრიული, როცა $0 < \varepsilon < 1$ ორბიტა არის ელიფსური, როცა $\varepsilon = 1$ ორბიტა არის პარაბოლური, ხოლო $\varepsilon > 1$ -ის შემთხვევაში კი ჰიპერბოლური. კონკრეტული M მასის სხეულისათვის მის გარშემო ორბიტის ექსცენტრისიტეტსა და ორბიტალურ პარამეტრს ცალსახად განსაზღვრავს მოძრავი m მასის სხეულის მუდმივი L იმპულსის მომენტი და E მექანიკური ენერგია. სიმარტივისათვის მოსახერხებელია რომ შემოვიღოთ კუთრი იმპულსის მომენტი და კუთრი ენერგია, რომლებიც მოიცემა შემდეგნაირად:

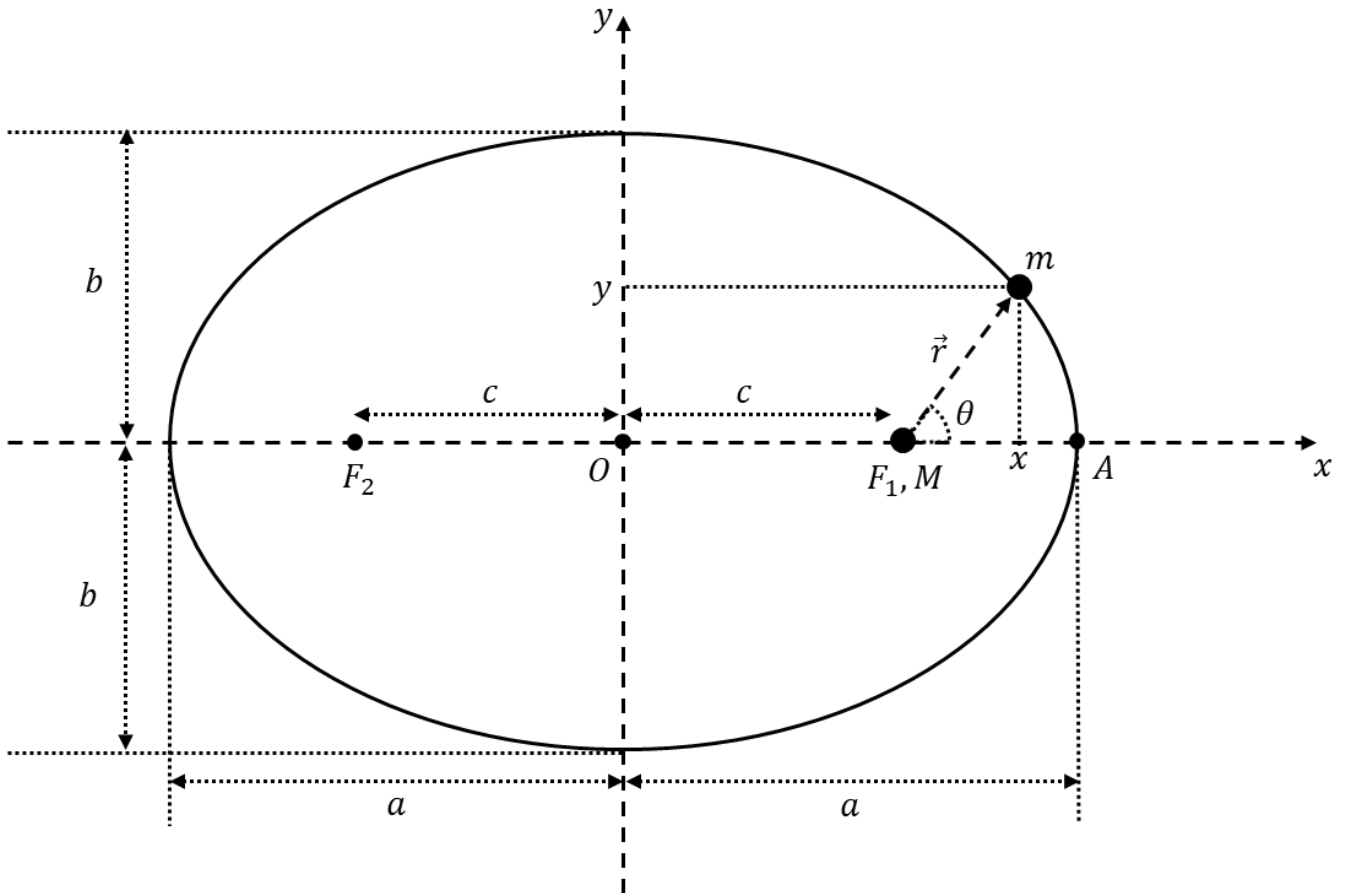
$$l = \frac{L}{m};$$

$$e = \frac{E}{m}$$

ნაწილი A: ელიფსური ტრაექტორია (7.0 ქულა)

ელიფსს გააჩნია ორი ფოკუსი (F_1 და F_2), რომლებიც იმით ხასიათდება რომ მათგან ელიფსის ნებისმიერ წერტილამდე მანძილების ჯამი კონკრეტული ელიფსისათვის მუდმივი სიდიდეა. ელიფსური ორბიტის შემთხვევაში M მასის სხეული ერთ-ერთ ფოკუსში იმყოფება და უძრავია. გარდა ამისა, ელიფსი ხასიათდება დიდი და მცირე ნახევარ ღერძებით რომელიც შესაბამისად აღნიშნულია a და b სიმბოლოებით. ელიფსის ფოკუსებიდან O ცენტრამდე მანძილი აღნიშნულია c -თი. ამავდროულად მოსახერხებელია შემოვიღოთ მართკუთხა კოორდინატა სისტემა, რომლის ცენტრიც ელიფსის ცენტრს ემთხვევა (იხ. ნახატი 1). ამ სისტემაში ტრაექტორია ასევე უნდა აკმაყოფილებდეს ელიფსის ცნობილ განტოლებას:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$



ნახატი 1. ელიფსური ტრაექტორია

A.1	ელიფსური ორბიტის შემთხვევაში იპოვეთ p ორბიტალური პარამეტრი და ε ექსცენტრისიტეტი. პასუხები გამოსახეთ M მასით, G გრავიტაციული მუდმივით, l კუთრი იმპულსის მომენტითა და e კუთრი ენერგიით.	1.0 pt.
A.2	დაიყვანეთ განტოლება (1) განტოლება (2)-ის სახეზე და გამოსახეთ a, b ნახევარღერძები და ცენტრიდან ფოკუსამდე c მანძილი p ორბიტალური პარამეტრითა და ε ექსცენტრისიტეტით.	1.5 pt.

იმპულსის მომენტის მუდმივობიდან გამომდინარე შეიძლება ჩვენება რომ რადიუს-ვექტორი დროის ტოლ მონაკვეთებში ტოლ ფართობებს შემოწერს, რაც ნიშნავს რომ რადიუს-ვექტორის მიერ შემოწერილი ფართობი A წერტილში ყოფნის მომენტიდან შეგვიძლია გამოვსახოთ როგორც:

$$S' = \frac{t}{T} S$$

სადაც, $S = \pi ab$ ელიფსის ფართობია, ხოლო T არის ბრუნვის პერიოდი, რომელიც მხოლოდ M მასაზე და a დიდ ნახევარღერძზეა დამოკიდებული. იგივე ფართობი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ელიფსის რკალსა და x ღერძს შორის არის ფართობისა და რადიუს ვექტორის მიერ შექმნილი მართკუთხა სამკუთხედის ფართობების ჯამის სახით:

$$S' = \frac{(x-c)y}{2} + \int_x^a y dx$$

სადაც განტოლება (2)-დან გამომდინარე $y = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$. ამ ინტეგრალის გამოსათვლელად საჭიროა გავაკეთოთ ჩასმა $x = a \cos \eta$ და შესაბამისად $dx = -a \sin \eta d\eta$. ხოლო (2) განტოლებიდან ელიფსზე მდებარე წერტილისთვის გვაქვს $y = b \sin \eta$.

A.3	აჩვენეთ რომ η -სა და t -ს შორის გვაქვს $c_1 t = \eta + c_2 \sin \eta$ სახის დამოკიდებულება და იპოვეთ c_1 და c_2 კოეფიციენტები. კოეფიციენტები გამოსახეთ T და ε სიდიდეებით.	1.5 pt.
A.4	იპოვეთ პერიოდის რა ნაწილის განმავლობაში იქნება სხეული სათავის მარცხენა მხარეს ($x < 0$). პასუხი გამოსახეთ ε ექსცენტრისიტეტით.	0.5 pt.

დედამიწის ($M \approx 5.9722 \cdot 10^{24}$ კგ) ცენტრიდან 10^4 კმ მანძილიდან გაუშვეს სატელიტი 8 კმ/წმ საწყისი სიჩქარით დედამიწის ცენტრთან შემაერთებული მონაკვეთის მართობული მიმართულებით.

A.5	იპოვეთ ორბიტის ექსცენტრისიტეტი, ორბიტალური პარამეტრი, დიდი ნახევარღერძი, მცირე ნახევარღერძი და პერიოდი. პასუხები ჩაწერეთ 5 ციფრის სიზუსტით (მაგ.: 1.2345 ან 0.12345).	0.5 pt.
A.6	იპოვეთ დედამიწის ცენტრიდან რა მანძილზე იქნება სხეული 8 სთ-ში. პასუხი ჩაწერეთ 3 ციფრის სიზუსტით (მაგ.: 1.23 ან 0.123).	2.0 pt.

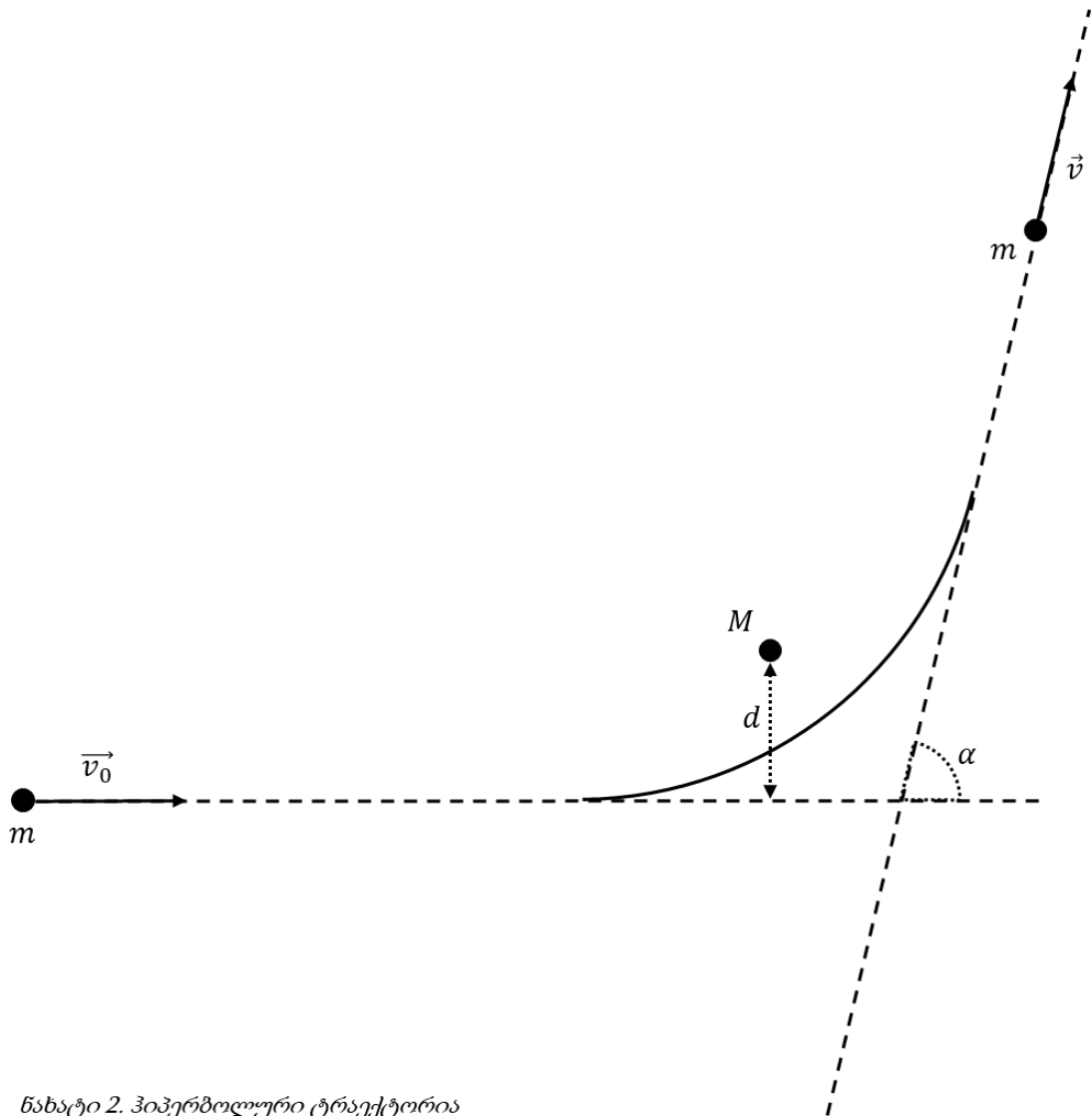
შენიშვნა: რადგან კოორდინატის დროზე დამოკიდებულების ანალიზურად ჩაწერა შეუძლებელია, მოგიწევთ განტოლების მიახლებით რიცხვითად ამოხსნა.

ნაწილი B: ჰიპერბოლური ტრაექტორია (3.0 ქულა)

ძალიან დიდი მანძილიდან (გრავიტაციული პოტენციური ენერგია ბევრად ნაკლებია ვიდრე კინეტიკური ენერგია) v_0 საწყისი სიჩქარით ისვრიან სხეულს, ისე რომ საწყისი სიჩქარის ვექტორის გამაგრძელებელი წრფიდან M მასის ობიექტამდე მანძილი არის d . ასეთ შემთხვევაში ტრაექტორია არის ჰიპერბოლური და მიახლოების შემდეგ სხეული ისევ დიდი მანძილით დაშორდება M მასის ობიექტს და უსასრულობაში მუდმივი სიჩქარით გააგრძელებს მოძრაობას სხვა მიმართულებით (იხ. ნახატი 2). საწყის და საბოლოო სიჩქარეებს შორის კუთხე ნახატზე აღნიშნულია α -თი. ამ შემთხვევაში ორბიტალური პარამეტრი და ექსცენტრისიტეტი მოიცემა შემდეგნაირად:

$$p = \frac{v_0^2 d^2}{GM}$$

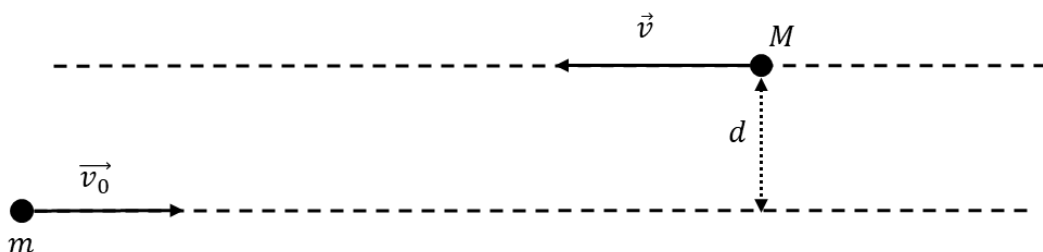
$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{v_0^4 d^2}{G^2 M^2}}$$



ნახატი 2. ჰიპერბოლური ტრაექტორია

B.1 იპოვეთ რა მინიმალური მანძილით მიუახლოვდება სხეული M მასის ობიექტს და α სიჩქარის მიმართულების ცვლილების კუთხე. პასუხები გამოსახეთ v_0, d, M და G სიდიდეებით. **0.5 pt.**

მოძრავ მასიურ სხეულებს ხშირად იყენებენ თანამგზავრების ასაჩქარებლად. დავუშვათ რომ იუპიტერისაკენ (მასა $M \approx 1.90 \cdot 10^{27}$ კგ, ორბიტალური სიჩქარე $v \approx 13.06$ კმ/წმ) დიდი მანძილიდან გაუშვეს თანამგზავრი $v_0 = 10$ კმ/წმ სიჩქარით იუპიტერის მოძრაობის საპირისპირო მიმართულებით, ისე რომ \vec{v}_0 -ის გამაგრძელებელი წრფიდან იუპიტერის ცენტრის დაშორებაა $d = 10^5$ კმ (იხ. ნახატი 3). ჩათვალოთ რომ იუპიტერი მოძრაობს წრფივად და თანაბრად მთელი პროცესის განმავლობაში.



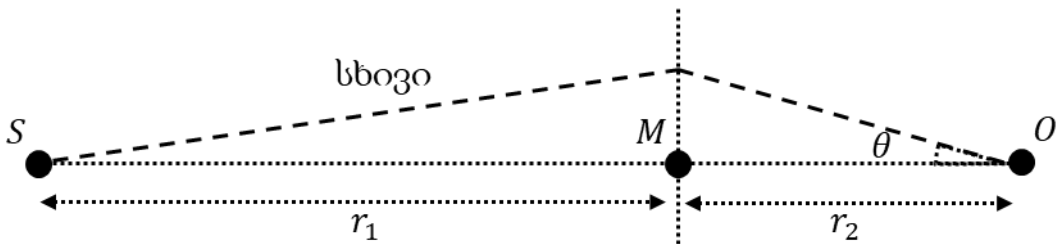
ნახატი 3.

B.2 იპოვეთ თანამგზავრის სიჩქარე და კუთხე საწყის და საბოლოო სიჩქარის ვექტორებს შორის, მას მერე რაც იგი იუპიტერს ისევ დიდი მანძილით დაშორდება. პასუხები გამოსახეთ 3 ციფრის სიზუსტით (მაგ.: 1.23 ან 0.123). **1.5 pt.**

მასიური ობიექტის სიახლოვეში მსგავს გამრუდებას სინათლის ტრაექტორიაც განიცდის, მაგრამ ზოგადი ფარდობითობის ეფექტების გამო წინა პუნქტებში მიღებული ფორმულების შეუცვლელად გამოყენება არ შეგვიძლია. ამ ცვლილების გათვალისწინებით და მცირე კუთხეების მიახლოების გამოყენებით სინათლის მიმართულების ცვლილების კუთხე გამოდის:

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 d} \ll 1$$

სადაც c სინათლის სიჩქარეა. განვიხილოთ შემთხვევა როდესაც S გამოსხივების წყაროსა და O დამკვირვებლის შემაერთებელ წრფეზე იმყოფება M მასის სხეული, ისე რომ მანძილი წყაროსა და სხეულს შორის არის r_1 , ხოლო მანძილი სხეულსა და დამკვირვებელს შორის კი r_2 (იხ. ნახატი 4). წყაროდან წამოსული სხივი M მასის სხეული გრავიტაციული ველის გამო მიმართულებას შეიცვლის და დამკვირვებლამდე θ კუთხით მივა. ნახატზე აღნიშნული ერთი სხივის გარდა, დამკვირვებლამდე იგივე კუთხით მივა ქვედა მხარეს წასული სხივი. ასეთივე სიტუაცია გვექნება სხვა კვეთის სიბრტყეებშიც, რომლებიც SO მონაკვეთს მოიცავენ. შესაბამისად დამკვირვებელი სინათლის წყაროს დაინახავს როგორც θ კუთხური რადიუსის მქონე წრეწირს.



ნახატი 4.

B.3 იპოვეთ θ კუთხური რადიუსი. პასუხი გამოსახეთ r_1, r_2, M, G და c სიდიდეებით. **1.0 pt.**

შენიშვნა: საჭიროების შემთხვევაში შეგიძლიათ გამოიყენოთ მცირე კუთხეების მიახლოებები ($\sin x \approx \tan x \approx x$ და $\cos x \approx 1$, თუ $x \ll 1$).

ამოცანა 2

ზედაპირული პლაზმონ-პოლარიტონები (10 ქულა)

ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელება გარემოში ბევრად უფრო საინტერესოა, ვიდრე ვაკუუმში. განსაკუთრებული შემთხვევაა, როდესაც ელექტრომაგნიტური ველი ურთიერთქმედებს მეტალში არსებულ თავისუფალ ელექტრონებთან და დიელექტრიკ-მეტალის ბმულ სისტემაში ჩნდება კოლექტიური ალგზნება, რომელსაც ეწოდება Surface Plasmon Polaritons (ზედაპირული პლაზმონ-პოლარიტონები).

პლაზმონ-პოლარიტონები წარმოიქმნება მეტალისა და დიელექტრიკის საზღვარზე და წარმოადგენს ელექტრომაგნიტური ტალღისა და ელექტრონული პლაზმის ოსცილაციების ჰიბრიდულ მოდას. მათი ერთ-ერთი მთავარი თვისებაა ის, რომ ველი ძლიერ ლოკალიზებულია ზედაპირთან და ექსპონენციალურად ქრება ორივე მიმართულებით — როგორც მეტალში, ისე დიელექტრიკში. ინტუიციურად, პლაზმონ-პოლარიტონი შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც „ბმული“ ტალღა, რომელიც მოძრაობს ზედაპირზე და თან „მიჰყავს“ ელექტრონების კოლექტიური რხევა. სწორედ ეს მიბმულობა იწვევს მის ძლიერ ლოკალიზაციას და უნიკალურ თვისებებს. ამგვარი ლოკალიზაცია ქმნის ველის მნიშვნელოვნად გაძლიერებას ზედაპირზე, რაც პლაზმონ-პოლარიტონებს განსაკუთრებულად მგრძობიარეს ხდის გარემოს ცვალებადობის მიმართ. ამ მოვლენის თანამედროვე პრაქტიკული გამოყენებები მოიცავს ბიოსენსორიკას, ნანო-ფოტონიკასა და ზედაპირულ სპექტროსკოპიას.

ნაწილი A: დრუდე-ლორენცის მოდელი მეტალისა და დიელექტრიკისთვის (1.0 ქულა)

ამ ამოცანას დავიწყებთ დრუდე-ლორენცის მოდელის განხილვით, რომელიც დიელექტრიკისა და მეტალის ერთიანი და უნივერსალური მიახლოებითი აღწერის საშუალებას იძლევა. ჯერ განვიხილოთ მეტალის თავისუფალი ელექტრონები, რომლებზეც მოქმედებს დროში ჰარმონიულად ცვლადი ელექტრული ველი. ასეთ პირობებში ეს ელექტრონები რაღაც მდებარეობის მახლობლად ირხევიან, რაც აღიწერება ელექტრონის კოორდინატისთვის დაწერილი ნიუტონის მეორე კანონით:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e\vec{E}$$

ელექტრონების ასეთი დინამიკა კი შეგვიძლია დავახასიათოთ როგორც ელექტრონების დიპოლური მომენტის $\vec{d} = -e\vec{r}$ რხევა, შესაბამისად აღარ დაგვჭირდება თავისუფალი მუხტების სიმკვრივისა და დენების განხილვა და ეს სიდიდეები ნულის ტოლად შეგვიძლია ჩავთვალოთ.

რაც შეეხება დიელექტრიკს, იქ თავისუფალი ელექტრონები არა გვაქვს, ისინი დაბმულებია ატომის ბირთვებთან, შესაბამისად მათი გადახრა წონასწორობის მდგომარეობიდან იწვევს დამაბრუნებელ ძალას, ანუ ელექტრონი იქცევა როგორც K სიხისტის ზამბარაზე მიბმული ოსცილატორი და აღიწერება შემდეგნაირად:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -K\vec{r} - e\vec{E}$$

და თუ ჩავსვამთ ამ ორ განტოლებაში მეტალისთვის და დიელექტრიკისთვის $\vec{E} \sim \sin(\omega t)$ გამოსახულებას და \vec{r} -საც მოვძებნით $\sim \sin(\omega t)$ სახით (სადაც ω ჰარმონიული ელექტრული

ველის რხევის სიხშირეა), შეგვიძლია მივიღოთ გამოსახულება ელექტრონის დიპოლური მომენტის დროზე დამოკიდებულებისთვის და შემდეგ გამოვითვალოთ პოლარიზაციის სიმკვრივე $\vec{P} = n\vec{d}$, სადაც n ელექტრონების კონცენტრაციაა მეტალში ან დიელექტრიკში. საბოლოოდ კი განმარტებიდან $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} \equiv \epsilon_0\epsilon_m\vec{E}$ მივიღებთ ელექტრული შეღწევადობის გამოსახულებას მეტალში ϵ_m და დიელექტრიკში ϵ_d :

$$\epsilon_m = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}; \quad \epsilon_d = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

A.1	გამოიყვანეთ გამოსახულებები ω_p პლაზმური სიხშირისთვის და ω_0 - სთვის ელექტრონების n კონცენტრაციის, ელექტრონის მუხტის მოდულის e სიდიდის, ელექტრონის m მასის, დიელექტრიკული K სიხისტის კოეფიციენტისა და ϵ_0 ელექტრული კონსტანტის საშუალებით.	0.5 pt.
A.2	გამოიანგარიშეთ რიცხობრივად ω_p პლაზმური სიხშირე სპილენძისთვის, თუ მოცემულია მასში თავისუფალი ელექტრონების კონცენტრაცია $n = 8.5 \cdot 10^{28} m^{-3}$, ელექტრონის მუხტის მოდულია $e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$, ელექტრონის მასაა $m = 9.1 \cdot 10^{-31} kg$ და ელექტრული მუდმივა არის $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} F/m$.	0.5 pt.

მეტალებისთვის ϵ_m ელექტრული შეღწევადობა სიხშირეზეა დამოკიდებული. დიდი სიხშირეებისთვის $\omega > \omega_p$ მეტალი დიელექტრიკული იქცევა, რადგან $\epsilon_m > 0$ და გამჭვირვალეა ელექტრომაგნიტური ტალღებისთვის, ხოლო პატარა სიხშირეებზე მის მოცულობაში ტალღების გავრცელება არ ხდება და სწორედ ასეთი სიხშირული დიაპაზონი გვინტერესებს, როცა ტალღების გავრცელება მხოლოდ მეტალის ზედაპირზე შეიძლება მოხდეს, ანუ მთელს ამოცანაში ვიხილავთ ისეთ სიხშირეებს, როცა $\epsilon_m < 0$. თავის მხრივ დიელექტრიკული შეღწევადობა ϵ_d სიხშირეზე თითქმის არაა დამოკიდებული ამოცანაში განხილული სიხშირის მნიშვნელობებისთვის $\omega^2 \ll \omega_0^2$ და მთელს ამოცანაში ϵ_d -ს მუდმივ სიდიდედ ჩავთვლით.

ნაწილი B: პლაზმონ პოლარიტონული მოდის დისპერსიული თანაფარდობის გამოყვანა მეტალ-დიელექტრიკის გამყოფ ზედაპირზე (4.0 ქულა)

ახლა განვიხილოთ ტალღური განტოლება ელექტრული ველისთვის:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0; \tag{1}$$

სადაც \vec{E} ელექტრული ველის ვექტორია, რომელიც სივრცულ კოორდინატებზე x , y , z -ზე და დროზეა დამოკიდებული, ω ელექტრომაგნიტური ტალღის სიხშირეა, c არის სინათლის სიჩქარე ვაკუუმში, ხოლო ϵ არის ჩვენს მიერ დრუდეს მოდელით უკვე გამოთვლილი მეტალის ϵ_m ან დიელექტრიკის ϵ_d ფარდობითი (უგანზომილებო) ელექტრული შეღწევადობა. ტალღურ განტოლებაში $\partial \vec{E} / \partial x$, $\partial \vec{E} / \partial y$, $\partial \vec{E} / \partial z$ და $\partial \vec{E} / \partial t$ სხვადასხვა კოორდინატებით და დროით კერძო წარმოებულებია და თუ ვიღებთ x -ით კერძო წარმოებულს $\vec{E}(x, y, z, t)$ ფუნქციიდან, გაწარმოებისას z , y და t ცვლადები მუდმივებად უნდა ჩავთვალოთ. პლაზმონ-პოლარიტონული ამონახსნი განიმარტება როგორც დიელექტრიკ-მეტალის გამყოფ საზღვარზე გავრცელებული ტალღა, რომელიც ძირითადად გამყოფ ზედაპირზეა კონცენტრირებული, ხოლო დიელექტრიკსა და მეტალში ორივე მიმართულებით მისი ამპლიტუდა ექსპონენციალურად კლებულობს. მივმართოთ საკოორდინატო ღერძები ისე, რომ $z = 0$ იყოს დიელექტრიკ-მეტალის გამყოფი ზედაპირი და ამასთან ერთად, ზოგადობის დაურღვევლად, ტალღის გავრცელების მიმართულება x -

ით აღვნიშნოთ, ხოლო y -ის მიმართულებით ტალღა ერთგვაროვნად ჩავთვალოთ (იხილეთ ნახატი 1). ჩვენთვის საკმარისი იქნება ელექტრული ველის მხოლოდ ორი E_x და E_z



მდგენელის განხილვა და ჩვენ უნდა ვეძებოთ ტალღური ამონახსნი ელექტრული ველის ერთი რომელიმე კომპონენტისთვის (ვთქვათ, x -სთვის) შემდეგი ფორმით:

$$E_x^d = E_0 \sin(kx - \omega t) e^{-p_d z} \quad \text{თუ } z > 0$$

$$E_x^m = E_0 \sin(kx - \omega t) e^{p_m z} \quad \text{თუ } z < 0 \quad (2)$$

ნახატი 1: კოორდინატა ღერძების განლაგება მეტალ-დიელექტრიკის გამყოფი ზედაპირის მიმართ. y ღერძი ნახატის სიბრტყის მართობულადაა.

სადაც E_0 მუდმივი სიდიდეა, k ტალღური რიცხვია გავრცელების მიმართულებით, ხოლო p_d და p_m

ექსპონენციალური კლების მახასიათებელი ტალღური რიცხვებია დიელექტრიკსა და მეტალში. მიაქციეთ ყურადღება, რომ ელექტრული ველის გადაბმის პირობიდან გამყოფ საზღვარზე k ტალღური რიცხვი ერთიდაიგივეა დიელექტრიკსა და მეტალში.

B.1 (2) -ის ჩასმით (1) -ში გამოიყვანეთ დამოკიდებულებები ტალღის ω სიხშირეს, ტალღურ k და p_d რიცხვებს შორის ერთი მხრივ დიელექტრიკში და მეორეს მხრივ მიიღეთ მსგავსი დამოკიდებულება ω -ს, k და p_m -ს შორის მეტალში. **0.5 pt.**

ახლა უნდა დავაკავშიროთ ერთმანეთთან ელექტრული ველის კომპონენტები E_x^d და E_z^d დიელექტრიკში და E_x^m და E_z^m მეტალში, რისთვისაც გამოიყენეთ გაუსის კანონი დიფერენციალური ფორმით:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

B.2 ჩაწერეთ გამოსახულებები E_z^d -სთვის დიელექტრიკში და E_z^m -სთვის მეტალში (2) -ის და (3) -ის გამოყენებით. **0.5 pt.**

ახლა საბოლოოდ უნდა განვსაზღვროთ ზედაპირული ტალღის მახასიათებლები. ამოცანა ასე დგას: მოცემული გვაქვს ტალღის სიხშირე ω . ამის საშუალებით ჩვენი მიზანია გამოვითვალოთ ტალღური რიცხვი k და შეღწევის სიღრმის ტალღური რიცხვები p_d და p_m დიელექტრიკსა და მეტალში, თუ ვიცით მეტალისთვის პლაზმური სიხშირე ω_p და დიელექტრიკის ϵ_d მუდმივა.

B.3 D_z^d და D_z^m გადაბმის პირობიდან გამყოფ ზედაპირზე და წინა პუნქტების შედეგების გამოყენებით ჩაწერეთ დისპერსიის კანონი (k -ს დამოკიდებულება ω -ზე, ω_p -ს და ϵ_d სიდიდეების გამოყენებით) პლაზმონ პოლარიტონებისთვის. **1.5 pt.**

B.4 გამოთვალეთ მაქსიმალური სიხშირე ω_{max} , რომლისთვისაც პლაზმონ-პოლარიტონები არსებობენ. შედეგი ჩაწერეთ ω_p -ს და ϵ_d სიდიდეების გამოყენებით. **0.5 pt.**

გადავიდეთ რიცხვით შეფასებებზე. ვთქვათ გვაქვს ტალღის სიხშირე, რომელიც ტოლია $\omega = 0.2\omega_p$. დიელექტრიკად განვიხილოთ მინა $\epsilon_d = 2$, მეტალი იყოს სპილენძი **A.2** პუნქტში გამოთვლილი პლაზმური სიხშირით და ავიღოთ სინათლის სიჩქარე $c = 3 \cdot 10^8$ მ/წმ -ის ტოლად.

B.5 გამოიანგარიშეთ რიცხობრივად პლაზმონ-პოლარიტონის გავრცელების ტალღური რიცხვი k და შეღწევადობის სიღრმეები $\Lambda_m = 1/p_m$ მეტალში და $\Lambda_d = 1/p_d$ დიელექტრიკში. **1.0 pt.**

ნაწილი C: პლაზმონ პოლარიტონი მეტალის ფირფიტაში. (5.0 ქულა)



ნახატი 2: სქემატური ნახაზი მეტალის ფირფიტისა ჰაერში.

განვიხილოთ მეტალის ფირფიტა (იხილეთ ნახატი 2), რომლის ორივე მხარეს ჰაერია ($\epsilon_d = 1$) და ვიპოვოთ იგივე ტიპის პლაზმონ-პოლარიტონული ამოხსნები, ანუ ელექტრომაგნიტური ველის ისეთი განაწილება, როცა ფირფიტისგან დაშორებასთან ერთად ველები ექსპონენციალურად კლებულობს. ვთქვათ, ფირფიტის სისქეა a და ავიღოთ $z = 0$ წერტილი ფირფიტის შუაში.

- | | | |
|------------|---|----------------|
| C.1 | ჩაწერეთ (2) -ის მსგავსი სივრცე-დროითი დამოკიდებულების გამოსახულებები E_x^m -სთვის მეტალში და E_x^d -სთვის ჰაერში E_x^m და E_x^d -ს გადაბმის პირობებიდან გამყოფ ზედაპირებზე. | 1.0 pt. |
| C.2 | B.2 პუნქტის მსგავსად, ასევე იპოვეთ გაუსის კანონიდან ელექტრული ველის z კომპონენტებიც მეტალში E_z^m და ჰაერში E_z^d ორივე მხარეს. | 0.5 pt. |
| C.3 | ჰაერი-მეტალის ორივე საზღვარზე D_z^d და D_z^m გადაბმის პირობებიდან მიიღეთ დისპერსიული თანაფარდობები ორი მოდისთვის, რომლებიც ჩაწერილია შემდეგნაირად:
$\epsilon_m p_d \tanh(p_m a/2) = -p_m \text{ და } \epsilon_m p_d = -p_m \tanh(p_m a/2)$ | 1.5 pt. |

განვიხილოთ ძალიან თხელი მეტალის ფირფიტის ზღვარი $a \rightarrow 0$. მაშინ პირველი დისპერსიული შტოს $\epsilon_m p_d \tanh(p_m a/2) = -p_m$ განხილვიდან მცირე სიხშირეების $\omega^2 \ll \omega_p^2$ შემთხვევაში გვექნება შემდეგი დისპერსიული თანაფარდობა: $k = R\omega^2/a$.

- | | | |
|---|---|----------------|
| C.4 | გამოითვალეთ R კოეფიციენტის ω_p -ზე დამოკიდებულება. | 1.5 pt. |
| ახლა გადავიდეთ დისპერსიის მეორე შტოს $\epsilon_m p_d = -p_m \tanh(p_m a/2)$ ანალიზზე იმავე $a \rightarrow 0$ ზღვარში: | | |
| C.5 | ჩაწერეთ დისპერსიის კანონი $k(\omega)$ ამ შემთხვევისთვის. | 0.5 pt. |

მითითება: გაითვალისწინეთ აღნიშვნა

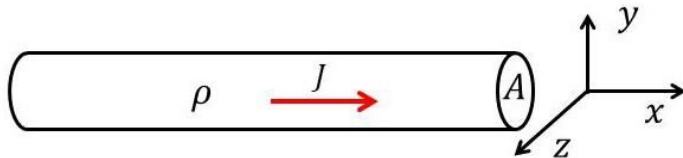
$$\tanh(x) \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

ზღვარში $x \rightarrow 0$ გამოიყენეთ მიახლოება $\tanh(x) \rightarrow x$.

ამოცანა 3

ელექტრომაგნიტური ველების ფარდობითობა (10 ქულა)

ერთი შეხედვით, ელექტრული და მაგნიტური ველები ერთმანეთთან მაინცადამაინც მჭიდრო კავშირში არაა, ელექტრული ველი უძრავი მუხტებითაც შეიძლება შეიქმნას და ამ ველმა უძრავ მუხტებზეც შეიძლება რომ იმოქმედოს. ხოლო მაგნიტური ველი მხოლოდ მოძრავ მუხტებთანაა დაკავშირებული. კერძოდ, თუ მუხტი მოძრაობს მაგნიტურ ველში,



ნახატი 1: უსასრულო დენიანი გამტარის სქემატური წარმოდგენა. x ემთხვევა ცილინდრის ღერძს.

მასზე ეს ველი მუხტის სიჩქარის პროპორციული ძალით მოქმედებს. ახლა რომ წარმოვიდგინოთ, რომ ჩვენ ვმოძრაობთ ზუსტად მუხტის სიჩქარით, მაშინ ჩვენს ათვლის სისტემაში ეს მუხტი უძრავია და მასზე არანაირი მაგნიტური ველით შექმნილი ძალა არ უნდა

მოქმედებდეს, რაც, რა თქმა უნდა, არაა ჭკუასთან ახლოს, ინერციულ ათვლის სისტემებში ფიზიკური პროცესები ერთმანეთის მსგავსად უნდა მიმდინარეობდეს. ერთ სისტემაში თუ მუხტზე მოქმედი ძალა არანულოვანია, არ შეიძლება სხვა ინერციულ ათვლის სისტემაში ეს ძალა ნულის ტოლი გახდეს. თუნდაც ეს მარტივი მაგალითი აჩვენებს, რომ მაგნიტური ველი ათვლის სისტემის შეცვლით ელექტრულ ველად უნდა გარდაიქმნებოდეს, რომ მერე ამ ელექტრულმა ველმა იმოქმედოს უძრავ მუხტზე და იმის მსგავსი ეფექტი ჰქონდეს, რაც მაგნიტურ ველს ჰქონდა მოძრავ მუხტზე.

ამ პარადოქსული მოვლენის ასახსნელად დაგვჭირდება ელექტრული და მაგნიტური ველების შექმნის წყაროს შესწავლა, კერძოდ კი ამ ამოცანაში განვიხილავთ ცილინდრულ გამტარს ან მილს. ამოცანის პირველ ნაწილში შევისწავლით მეტალის გამტარში დენის გავრცელებისას წარმოქმნილ ელექტრულ და მაგნიტურ ველებს და მუხტზე მოქმედ ძალებს სხვადასხვა ათვლის სისტემაში. მეორე და მესამე ნაწილი კი ეხება მუხტის და დენის სიმკვრივის ფარდობითობას მოძრავ ინერციულ ათვლის სისტემაში გადასვლისას და შესაბამის ცვლილებებს ამ მუხტებით და დენებით შექმნილ ელექტრულ და მაგნიტურ ველებში.

ნაწილი A: დენიანი გამტარის მიერ შექმნილი ელექტრული და მაგნიტური ველები მოძრავ და უძრავ ინერციულ ათვლის სისტემებში (3.5 ქულა)

განვიხილოთ უმარტივესი შემთხვევა, როცა გვაქვს დამუხტული ცილინდრი, სადაც მუხტის სიმკვრივე არის ρ და ეს მუხტები წარმოქმნიან დენს, რომლის სიმკვრივე აღვნიშნოთ J -თი (იხილეთ ნახატი 1). ელექტრული და მაგნიტური ველები გამოითვლება ცნობილი ფორმულებიდან:

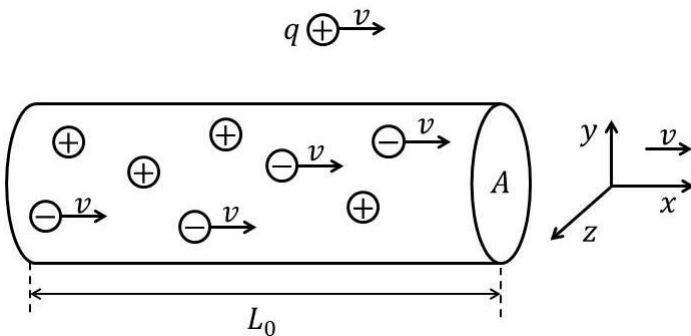
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \frac{\rho}{\epsilon_0} dV; \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

პირველი ფორმულის მარცხენა მხარის ინტეგრალი აღებულია ჩაკეტილი ზედაპირის ფართობზე, ხოლო მარჯვენა მხარის კი იმავე ზედაპირის შიგნით მთელ მოცულობაში. მეორე ფორმულის მარცხენა მხარის ინტეგრალი აღებულია ჩაკეტილი კონტურის წირზე, ხოლო მარჯვენა მხარის კი ამ კონტურის მთლიან შიდა ფართობზე. ϵ_0 ელექტრული და μ_0 მაგნიტური მუდმივაა, ცილინდრის განიკვეთის ფართობია A .

A.1 გამოითვალეთ ელექტრული და მაგნიტური ველების არანულოვანი მდგენელები y და z ღერძზე ცილინდრის გარეთ მდებარე წერტილებში: $(0, r, 0)$ და $(0, 0, r)$, სადაც r მანძილია კოორდინატთა სათავიდან. **0.3 pt.**

ახლა კი განვიხილოთ უსასრული წრფივი გამტარი, რომლის მთლიანი მუხტი ნულის ტოლია. დენის გადამტანი ელექტრონებია და დავუშვათ, რომ ყველანი მოძრაობენ ერთნაირი v სიჩქარით (მოძრაობის მიმართულებად ავირჩიოთ x ღერძი), ხოლო დადებითი იონები კი უძრავია. ასევე განვიხილოთ დადებითი წერტილოვანი q მუხტი, რომელიც ამ გამტარიდან r მანძილითაა დაშორებული და y ღერძზე მდებარეობს. ცხადია, რომ რადგან გამტარი ნეიტრალურია, ის ელექტრულ ველს ვერ შექმნის და საცდელ მუხტზე ელექტრული ველი ვერ იმოქმედებს. სიმარტივისთვის ჩავთვალოთ, რომ ეს საცდელი მუხტიც ზუსტად იმავე v სიჩქარით და იგივე მიმართულებით მოძრაობს, როგორც ელექტრონები გამტარში (იხილეთ ნახატი 2) და მაშინ მასზე იმოქმედებს მაგნიტური ველი, რომელიც გამტარში მოძრავი ელექტრონებითაა შექმნილი.

A.2 გამოითვალეთ დადებით q მუხტზე მოქმედი ლორენცის ძალის არანულოვანი გეგმილი უძრავ ათვლის სისტემაში $(0, r, 0)$ წერტილში იმის გათვალისწინებით, რომ $\vec{J} = \rho \vec{v}$, სადაც ρ ელექტრონების მუხტის სიმკვრივეა. პასუხი ჩაწერეთ $q, v, \rho, \epsilon_0, A, r$ სიდიდეების და $c -$ სინათლის სიჩქარის გამოყენებით. გაითვალისწინეთ რომ $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$ **0.2 pt.**



ნახატი 2: ნეიტრალური ცილინდრული გამტარის სქემა. ელექტრონები, გამტარის გარეთ არსებული დადებითი მუხტი და მოძრავი კოორდინატთა სისტემა ერთიდაიგივე v სიჩქარით გადაადგილდებიან

ახლა გადავიდეთ v სიჩქარით მოძრავ ათვლის სისტემაში რომლის მიმართაც q მუხტი უძრავია. ამ სისტემაში, რა თქმა უნდა, მაგნიტური ველი q მუხტზე არ მოქმედებს.

მთელი იდეა ამ პარადოქსული სიტუაციის გადაჭრისა იმაში მდგომარეობს, რომ სინამდვილეში ნეიტრალური დენიანი გამტარი მოძრავ ათვლის სისტემაში დამუხტული ხდება და ეს დამუხტული გამტარი მოქმედებს კულონის ძალით უძრავ q მუხტზე მოძრავ ათვლის სისტემაში.

გამოვიკვლიოთ ეს ეფექტი: პირველი, რაც უნდა გავითვალისწინოთ ისაა, რომ გამტარში არსებული სრული დადებითი მუხტი (ისევე როგორც უარყოფითად დამუხტული ელექტრონების სრული მუხტი) არ იცვლება ათვლის სისტემის არჩევისდა მიუხედავად. ანუ გამტარის სრული დადებითი და უარყოფითი მუხტები ცალ-ცალკე იგივე რჩება უძრავ და მოძრავ ათვლის სისტემაში. რაც იცვლება, ესაა გამტარის ის სიგრძეები, რომლებიც უძრავ და მოძრავ მუხტებთანაა დაკავშირებული: მართლაც, ავირჩიოთ გამტარის L_0 სიგრძის მონაკვეთი, რომელშიც არიან როგორც დადებითი, ასევე v სიჩქარით მოძრავი უარყოფითი მუხტები, რომელთა მუხტის სიმკვრივეებია შესაბამისად ρ_+ და ρ_- და გამტარის ნეიტრალურობიდან გამომდინარე ეს სიმკვრივეები აბსოლუტური მნიშვნელობით ერთმანეთს ემთხვევა და ნიშნით საპირისპიროა, ანუ გამტარის მიმართ უძრავ ათვლის სისტემაში

$$\rho_+ + \rho_- = 0.$$

ესე იგი ჩვენ შეგვიძლია გამოვყოთ ორი სისტემა: ერთი არის დადებითი მუხტების ერთობლიობა, რომელიც მოთავსებულია L_0 სიგრძის ცილინდრში და მეორე - უარყოფითი მუხტები, მოთავსებულია ასევე L_0 სიგრძის ცილინდრში, ოღონდ ეს ცილინდრი მოძრაობს v სიჩქარით უძრავ ათვლის სისტემაში. როგორც ცნობილია აინშტაინის ფარდობითობის თეორიის მიხედვით, თუ უძრავი ცილინდრის სიგრძე გამტარის მიმართ უძრავ ათვლის სისტემაში არის L_0 , მაშინ v სიჩქარით მოძრავ ათვლის სისტემაში მისი სიგრძე იქნება

$$L' = L_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

ესე იგი რომ განვიხილოთ გამტარის ის სიგრძე, რომელშიც დადებითი მუხტები იმყოფებიან, მოძრავ ათვლის სისტემაში გადასვლისას ეს სიგრძე დამოკლდება, მაგრამ რადგან მუხტის სრული რაოდენობა მუდმივი უნდა დარჩეს, გამოდის, რომ დადებითი მუხტის სიმკვრივე გაიზრდება მოძრავ ათვლის სისტემაში გადასვლისას. ანუ დადებითი მუხტის მუდმივობის კანონიდან გვაქვს შემდეგი ტოლობა:

$$L_0 \rho_+ = L' \rho'_+$$

სადაც ρ_+ არის დადებითი მუხტის სიმკვრივე ამ მუხტების მიმართ უძრავ ათვლის სისტემაში, ხოლო ρ'_+ არის ამავე მუხტების სიმკვრივე v სიჩქარით მოძრავ ათვლის სისტემაში. სიგრძეების თანაფარდობიდან ვღებულობთ:

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

ხოლო მოძრავი უარყოფითი მუხტების შემთხვევაში, ეს მუხტები გამტარის მიმართ უძრავ ათვლის სისტემაში იმყოფებიან L_0 სიგრძის ცილინდრში, რომელიც მოძრაობს v სიჩქარით.

A.3	რა სიგრძისაა უძრავ ათვლის სისტემაში v სიჩქარით მოძრავი L_0 სიგრძის ცილინდრი v სიჩქარით მოძრავ ათვლის სისტემაში? გამოიყვანეთ უძრავ და მოძრავ ათვლის სისტემებში უარყოფითი მუხტის სიმკვრივეების ურთიერთდამოკიდებულება.	1.0 pt.
A.4	გამოითვალეთ ჯამური (დადებითს დამატებული უარყოფითი) მუხტის ρ' სიმკვრივე მოძრავ სისტემაში ρ_+ v და c სიდიდეების გამოყენებით.	0.5 pt.
A.5	გამოითვალეთ ამ ჯამური მუხტის სიმკვრივის მიერ q მუხტზე მოქმედი ძალის არანულოვანი გეგმილი $(0, r, 0)$ წერტილში და შეადარეთ A.2 პუნქტში მიღებულ შედეგს. რა არის ამ ორი შედეგის შეფარდება? ჩაწერეთ შეფარდება მხოლოდ v და c -ს გამოყენებით. ემთხვევა თუ არა ეს შედეგი ძალის მართობული (მოძრავი ათვლის სისტემის სიჩქარის მიმართ) მდგენელის გარდაქმნის კანონს უძრავიდან მოძრავ ათვლის სისტემაში გადასვლის დროს?	1.5 pt.

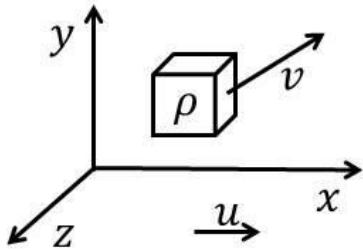
ნაწილი B: მუხტის და დენის სიმკვრივების ფარდობითობა. (4.5 ქულა)

ახლა განვიხილოთ მხოლოდ ერთი სახეობის (ვთქვათ, დადებითი) ρ სიმკვრივის მუხტები, რომლებიც მოძრაობენ უძრავი ათვლის სისტემის მიმართ v სიჩქარით და არიან მოთავსებული ამავე სიჩქარით მოძრავ L_0 სიგრძის წარმოსახვით ცილინდრში. განვიხილოთ ათვლის სისტემა, რომელიც იგივე მიმართულების ოღონდ სიდიდით სხვა, u სიჩქარით მოძრაობს უძრავი ათვლის სისტემის მიმართ.

B.1	გამოსახეთ მოძრავ ათვლის სისტემაში მუხტის ρ' სიმკვრივე უძრავ ათვლის სისტემაში ρ მუხტის სიმკვრივის, $J = \rho v$ დენის სიმკვრივის, მოძრავი სისტემის u სიჩქარისა და სინათლის c სიჩქარის საშუალებით.	1.0 pt.
------------	--	----------------

ახლა გამოვიყვანოთ დენის სიმკვრივის გარდაქმნის კანონი ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეში გადასვლისას.

B.2 გამოსახეთ მოძრავ ათვლის სისტემაში $J' = \rho'v'$ დენის სიმკვრივე უძრავ **1.5 pt.** ათვლის სისტემაში ρ მუხტის სიმკვრივის, $J = \rho v$ დენის სიმკვრივის, მოძრავი სისტემის u სიჩქარისა და სინათლის c სიჩქარის საშუალებით.



ნახატი 3: არაკოლინეარული შემთხვევის სქემატური ნახაზი.

გადავიდეთ არაკოლინეარულ შემთხვევაზე, როდესაც მუხტების დენის სიმკვრივე და მოძრავი ათვლის სისტემის სიჩქარეები აღარაა ერთი მიმართულებით. ამ შემთხვევაში განვიხილოთ \vec{v} სიჩქარით მოძრავი მცირე კუბური ელემენტი, სადაც მუხტის სიმკვრივეა ρ . ავიღოთ u -ს მიმართულება x ღერძის გასწვრივ, ხოლო \vec{v} არის ნებისმიერი მიმართულებით (იხილეთ ნახატი 3). უნდა დავადგინოთ, როგორ გარდაიქმნებიან უძრავიდან მოძრავ ათვლის სისტემაში გადასვლისას დენის და მუხტის სიმკვრივები.

B.3 გამოსახეთ მოძრავ ათვლის სისტემაში ρ' მუხტის სიმკვრივე და \vec{J}' დენის სიმკვრივის ვექტორის მდგენელები უძრავ ათვლის სისტემაში ρ მუხტის სიმკვრივის, \vec{J} დენის სიმკვრივის ვექტორის მდგენელების, მოძრავი სისტემის u სიჩქარისა და სინათლის c სიჩქარის საშუალებით. **2.0 pt.**

ნაწილი C: ელექტრული და მაგნიტური ველების ფარდობითობა. (2.0 ქულა)

ახლა რაც დაგვრჩა არის ამ მუხტების და დენის სიმკვრივების მიერ შექმნილი ელექტრული და მაგნიტური ველების ფარდობითობის დადგენა. **B.3** პუნქტში მიღებული შედეგების მიხედვით არაა რთული მუხტების და დენის სიმკვრივების დაკავშირება მათ მიერ შექმნილ ელექტრულ და მაგნიტურ ველებთან **A.1** პუნქტის შედეგების მიხედვით y და z ღერძზე მდებარე წერტილებში: $(0, r, 0)$ და $(0, 0, r)$ უძრავ და მოძრავ ათვლის სისტემებში.

C.1 გამოსახეთ მოძრავ ათვლის სისტემაში \vec{E}' და \vec{B}' ვექტორების მდგენელები უძრავ ათვლის სისტემაში გამოთვლილი \vec{E} და \vec{B} ვექტორების მდგენელების, სინათლის c სიჩქარის და მოძრავი სისტემის u სიჩქარის საშუალებით (აიღეთ u სიჩქარე ისევ x ღერძის მიმართულებით). **1.5 pt.**

C.2 გადაამოწმეთ ელექტრომაგნიტური ფარდობითობის შემდეგი თვისებები: **0.5 pt.**
 $(\vec{E}')^2 - c^2(\vec{B}')^2 = (\vec{E})^2 - c^2(\vec{B})^2$ და $(\vec{E}' \cdot \vec{B}') = (\vec{E} \cdot \vec{B})$

მითითება: ამოცანის ზოგიერთ პუნქტში შეიძლება დაგჭირდეთ შემდეგი გარდაქმნები დროის ინტერვალისთვის, სიგრძეებისთვის და იმპულსის მართობული მდგენელებისთვის უძრავი ათვლის სისტემიდან x ღერძის გასწვრივ u სიჩქარით მოძრავ ათვლის სისტემაში გადასვლისას:

$$dt' = dt\sqrt{1 - (u/c)^2}; \quad L'_x = L_x\sqrt{1 - (u/c)^2}; \quad L'_y = L_y; \quad L'_z = L_z; \quad p'_y = p_y; \quad p'_z = p_z$$

ხოლო სიჩქარეების ფარდობითობას აქვს შემდეგი სახე იგივე ათვლის სისტემებში:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \quad v'_y = v_y \frac{\sqrt{1 - (u/c)^2}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \quad v'_z = v_z \frac{\sqrt{1 - (u/c)^2}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

ამოცანა #1 -ის ამოხსნა და შეფასების სქემა: მასიური სხეულის გრავიტაციულ ველში მოძრაობა

A.1 განვიხილოთ ორბიტაზე მინიმალური (r_-) და მაქსიმალური (r_+) დაშორებები M -ისგან. ორივე შემთხვევაში რადიუს-ვექტორი სიჩქარის მართობულია, ამიტომ იმპულსის მომენტი იქნება:

$$L = lm = mv_{\pm}r_{\pm}$$

სრული მექანიკური ენერგია მოიცემა როგორც:

$$E = em = -\frac{GMm}{r_{\pm}} + \frac{mv_{\pm}^2}{2}$$

იმპულსის მომენტის განტოლებიდან $v_{\pm} = l/r_{\pm}$ -ის ენერგიის განტოლებაში ჩასმით და განტოლების ორივე მხარის r_{\pm}^2 -ზე გამრავლებით მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას r_{\pm} -ის მიმართ:

$$er_{\pm}^2 + GMr_{\pm} - \frac{l^2}{2} = 0$$

ამ განტოლების ამონახსნები არის:

$$r_{\pm} = \frac{-GM \pm \sqrt{G^2M^2 + 2el^2}}{2e}$$

(0.25 ქულა)

ორბიტის განტოლებიდან მინიმალური და მაქსიმალური მანძილის მიღება შეიძლება შესაბამისად $\theta = 0$ -ის და $\theta = \pi$ -ის ჩასმით:

$$r_- = \frac{p}{1 + \varepsilon} = \frac{-GM + \sqrt{G^2M^2 + 2el^2}}{2e}$$

$$r_+ = \frac{p}{1 - \varepsilon} = \frac{-GM + \sqrt{G^2M^2 + 2el^2}}{2e}$$

(0.5 ქულა)

ამ სისტემის p -ს და ε -ის მიმართ ამოხსნით მივიღებთ:

$$p = \frac{l^2}{GM}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2el^2}{G^2M^2}}$$

(0.25 ქულა)

A.2 ნახაზიდან ჩანს, რომ:

$$r \cos \theta = x - c \equiv x', r \sin \theta = y$$

ელიფსის ტრეკტორიის განტოლება (1)-ში ჩასმით მივიღებთ:

$$r = \frac{p}{1 + \frac{\varepsilon x'}{r}}$$

(0.5 ქულა)

საიდანაც გვქვინება:

$$\begin{aligned} \sqrt{x'^2 + y^2} + \varepsilon x' &= p \\ \sqrt{x'^2 + y^2} &= p - \varepsilon x' \\ x'^2 + y^2 &= p^2 - 2\varepsilon x'p + \varepsilon^2 x'^2 \\ x'^2(1 - \varepsilon^2) + 2\varepsilon x'p + y^2 &= p^2 \\ x'^2 + 2\frac{2\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2}x' + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} &= \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2} \\ x'^2 + 2\frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2}x' + \frac{\varepsilon^2 p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} &= \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2 p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} \\ \left(x' + \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} &= \frac{p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} \\ \left(x' + \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} &= \frac{p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} \\ \frac{\left(x - c + \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2}\right)^2}{\frac{p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}} &= 1 \end{aligned}$$

(0.5 ქულა)

რადგან ელიფსის განტოლება მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში არის:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

საიდანაც ცხადად ჩანს რომ:

$$\begin{aligned} a &= \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \\ b &= \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \\ c &= \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2} = a\varepsilon \end{aligned}$$

(0.5 ქულა)

A.3 ფართობების გამოსახულებების გატოლებით გვქვინება:

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{(x - c)b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}{2} + b \int_x^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$

$$\frac{2\pi t}{T} = \frac{(a \cos \eta - a\varepsilon) \sin \eta}{a} - 2 \int_{\eta}^0 \sin^2 \eta \, d\eta$$

(0.5 ქულა)

$$\frac{2\pi t}{T} = \sin \eta \cos \eta - \varepsilon \sin \eta + \int_{\eta}^0 (\cos 2\eta - 1) \, d\eta$$

$$\frac{2\pi t}{T} = \sin \eta \cos \eta - \varepsilon \sin \eta + \left(\frac{\sin 2\eta}{2} - \eta \right) \Big|_{\eta}^0$$

და საბოლოოდ ვიღებთ:

$$\frac{2\pi t}{T} = \eta - \varepsilon \sin \eta$$

(0.5 ქულა)

საიდანაც ჩანს რომ:

$$c_1 = \frac{2\pi}{T}$$

$$c_2 = -\varepsilon$$

(0.5 ქულა)

A.4 ($x = 0, y = b$) წერტილში $\sin \eta = 1$ და $\cos \eta = 0$, შესაბამისად $\eta = \pi/2$ და ამ წერტილში მისვლამდე გასული დროისათვის შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{2\pi t_1}{T} = \frac{\pi}{2} - \varepsilon \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right)$$

(0.2 ქულა)

($x = 0, y = -b$) წერტილში $\sin \eta = -1$ და $\cos \eta = 0$, შესაბამისად $\eta = 3\pi/2$ და ამ წერტილში მისვლამდე გასული დროისათვის შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{2\pi t_2}{T} = \frac{3\pi}{2} - \varepsilon \sin \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{T}{2\pi} \left(\frac{3\pi}{2} + \varepsilon \right)$$

(0.2 ქულა)

პერიოდის ნაწილი იქნება:

$$\frac{t_2 - t_1}{T} = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{\pi}$$

(0.1 ქულა)

A.5 მოცემული სიჩქარისა და დაშორებისათვის კუთრი ენერგია და იმპულსის მომენტი იქნება:

$$e = -\frac{GM}{r} + \frac{v^2}{2} \approx -7.8603 \cdot 10^6 \text{ ჯ/კგ}$$

$$l = vr \approx 8.0000 \cdot 10^{10} \text{ მ}^2/\text{წმ}$$

ორბიტალური პარამეტრისა და ექსცენტრისიტეტისათვის ნაწილ 1-ში მიღებული ფორმულებით მივიღებთ:

$$p = \frac{l^2}{GM} \approx 1.6056 \cdot 10^7 \text{ მ}$$

(0.1 ქულა)

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2el^2}{G^2M^2}} \approx 6.0561 \cdot 10^{-1}$$

(0.1 ქულა)

ნაწილ 2-ში მიღებული ფორმულებით:

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \approx 2.5356 \cdot 10^7 \text{ მ}$$

(0.1 ქულა)

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \approx 2.0177 \cdot 10^7 \text{ მ}$$

(0.1 ქულა)

რადგან პერიოდი მხოლოდ დიდ ნახევარ-ლერძზეა დამოკიდებული, მისი ფორმულის მიღება შეიძლება a რადიუსის წრიული ორბიტის განხილვით:

$$m\omega^2 a = \frac{GMm}{a^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \approx 1.1161 \cdot 10^1 \text{ სთ}$$

(0.1 ქულა)

A.6 კეპლერის განტოლებაში წინა პუნქტში მიღებული პასუხების ჩასმით მივიღებთ განტოლებას:

$$\eta - 0.60561 \sin \eta - 4.5035 = 0$$

(0.5 ქულა)

ამ განტოლების რიცხვითად ამოხსნის შედეგად მიიღება $\eta \approx 4.0326$. ნებისმიერი გზით სწორი პასუხის მიღებაში სრული ქულა დაიწერება. ამოხსნის ერთ ერთი მეთოდია ორობითი ძებნის მეთოდი:

განვიხილოთ ფუნქცია $f(\eta) = \eta - 0.60561 \sin \eta - 4.5035$. $f(0) \approx -4.5035 < 0$ და $f(2\pi \approx 6.2832) \approx 1.7797 > 0$, რაც ნიშნავს რომ ამონახსნი $(0, 6.2832)$ შუალედშია. ამ შუალედის შუაწერტილის ფუნქციაში ჩასმით ვიღებთ $f(3.1416) \approx -1.3619 < 0$, აქედან გამომდინარე ამონახსნი არის $(3.1416, 6.2832)$. ამ შუალედის შუაწერტილში $f(4.7124) \approx 0.8144 > 0$ ანუ ამონახსნი არის $(3.1416, 4.7124)$ შუალედში და ასე შემდეგ:

$$f(3.9270) \approx -0.1482 < 0 \Rightarrow \eta \in (3.9270, 4.7124)$$

$$f(4.3197) \approx 0.3757 > 0 \Rightarrow \eta \in (3.9270, 4.3197)$$

$$f(4.1234) \approx 0.1234 > 0 \Rightarrow \eta \in (3.9270, 4.1234)$$

$$f(4.0252) \approx -0.0102 < 0 \Rightarrow \eta \in (4.0252, 4.1234)$$

$$f(4.0743) \approx 0.0572 > 0 \Rightarrow \eta \in (4.0252, 4.0743)$$

$$f(4.0498) \approx 0.0237 > 0 \Rightarrow \eta \in (4.0252, 4.0498)$$

$$f(4.0375) \approx 0.0068 > 0 \Rightarrow \eta \in (4.0252, 4.0375)$$

$$f(4.0314) \approx -0.0017 < 0 \Rightarrow \eta \in (4.0314, 4.0375)$$

$$f(4.0345) \approx 0.0026 > 0 \Rightarrow \eta \in (4.0314, 4.0345)$$

$$f(4.0330) \approx 0.0005 > 0 \Rightarrow \eta \in (4.0314, 4.0330)$$

$$f(4.0322) \approx -0.0005 < 0 \Rightarrow \eta \in (4.0322, 4.0330)$$

აქედან უკვე შეიძლება თქმა რომ 3 ციფრის სიზუსტით $\eta \approx 4.03$.

(1.0 ქულა)

აქედან გამომდინარე $x = a \cos \eta \approx -1.60 \cdot 10^7$ მ და $y = b \sin \eta \approx -1.57 \cdot 10^7$ მ. დედამიწის კოორდინატებია ($x_0 = \varepsilon a \approx 1.54 \cdot 10^7$ მ, $y_0 = 0$ მ), შესაბამისად მანძილი იქნება:

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \approx 3.50 \cdot 10^7 \text{ მ}$$

(0.5 ქულა)

B.1 ტრაექტორიის განტოლებიდან r მინიმალურია როცა $\theta = 0$:

$$r_{min} = \frac{p}{1 + \varepsilon} = \frac{v_0^2 d^2}{GM + \sqrt{G^2 M^2 + v_0^4 d^2}}$$

(0.2 ქულა)

ტრაექტორიის განტოლებაში r უსასრულოება ხდება როდესაც $1 + \varepsilon \cos \theta$ მნიშვნელი 0-ის ტოლი ხდება. ეს მოხდება როცა:

$$\theta_{max} = \pm \arccos \frac{-1}{\varepsilon}$$

შესაბამისად:

$$\begin{aligned} \alpha &= \pi - 2 \left(\pi - \arccos \frac{-1}{\varepsilon} \right) = \pi - 2 \arccos \frac{1}{\varepsilon} = 2 \arcsin \frac{1}{\varepsilon} = 2 \arcsin \frac{GM}{\sqrt{G^2 M^2 + v_0^4 d^2}} \\ &= 2 \arctan \frac{GM}{dv_0^2} \end{aligned}$$

(0.3 ქულა)

B.2 წინა პუნქტებში მიღებული ფორმულების გამოყენება რომ შევძლოთ გადავიდეთ იუპიტერთან დაკავშირებულ ათვლის სისტემაში, რომელშიც იუპიტერი უძრავია და თანამგზავრი მისკენ მოდის $v'_0 = v + v_0 \approx 2.306 \cdot 10^4$ მ/წმ სიჩქარით. რადგან სიჩქარეები პარალელურია d არ შეიცვლება. შესაბამისად წინა პუნქტში მიღებული ფორმულის საშუალებით მივიღებთ:

$$\alpha = 2 \arctan \frac{GM}{dv_0^2} \approx 2.348$$

(0.3 ქულა)

იუპიტერის სისტემაში დიდი მანძილით დაშორების მერე თანამგზავრის სიჩქარის მოდული ენერგიის შენახვის კანონიდან გამომდინარე იგივე დარჩება:

$$v' = v'_0 \approx 2.306 \cdot 10^4 \text{ მ/წმ}$$

შესაბამისად \vec{v}_0 -ისკენ მიმართულ x ღერძზე და მის მართობულ y ღერძზე იუპიტერის სისტემაში თანამგზავრის სიჩქარე იქნება:

$$v'_x = v' \cos \alpha \approx -1.616 \cdot 10^4 \text{ მ/წმ}$$

$$v'_y = v' \sin \alpha \approx 1.645 \cdot 10^4 \text{ მ/წმ}$$

(0.3 ქულა)

უძრავ სისტემაში გადმოსვლისას გვექნება:

$$v''_x = v'_x - v \approx -2.922 \cdot 10^4 \text{ მ/წმ}$$

$$v''_y = v'_y \approx 1.645 \cdot 10^4 \text{ მ/წმ}$$

(0.3 ქულა)

შესაბამისად სიჩქარის მოდული იქნება:

$$v'' = \sqrt{v''_x{}^2 + v''_y{}^2} \approx 3.35 \cdot 10^4 \text{ მ/წმ}$$

(0.3 ქულა)

ხოლო x -ღერძთან კუთხე, რაც იგივე საწყის და საბოლოო სიჩქარეებს შორის კუთხეა იქნება:

$$\alpha' = \arccos \frac{v''_x}{v''} \approx 2.63 \text{ რად} \approx 151^\circ$$

(0.3 ქულა)

B.3 ნახაზზე არსებულ სამკუთხედში სხივის გადახრის α კუთხე არის სამკუთხედის გარე კუთხე, ამიტომ:

$$\alpha = \theta + \angle S$$

(0.25 ქულა)

შესაბამისად $\theta, \angle S \ll 1$. სხივის M -დან დაშორება იქნება სამკუთხედის სიმაღლე:

$$d = r_2 \theta = r_1 \angle S$$

(0.25 ქულა)

შესაბამისად მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{4GM}{c^2 r_2 \theta} = \theta + \frac{r_2 \theta}{r_1}$$

(0.25 ქულა)

საიდანაც:

$$\theta = \sqrt{\frac{4GMr_1}{c^2 r_2 (r_1 + r_2)}}$$

(0.25 ქულა)

ამოცანა #2 -ის ამოხსნა და შეფასების სქემა: პლაზმონ-პოლარიტონები

A.1 ელექტრონის კოორდინატისთვის ჩავწერთ ნიუტონის მეორე კანონს:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e \vec{E}$$

რაც შეეხება დიელექტრიკს, ელექტრონი იქცევა როგორც ზამბარაზე მიბმული ოსცილატორი და აღიწერება შემდეგნაირად:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -K \vec{r} - e \vec{E}$$

და თუ ჩავსვამთ ამ ორ განტოლებაში მეტალისთვის და დიელექტრიკისთვის $\vec{E} \sim \sin(\omega t)$ -ს გამოსახულებას, მივიღებთ ელექტრონის დიპოლური მომენტისთვის:

$$\vec{d} = -e \vec{r} = -\frac{e^2}{m \omega^2} \vec{E}$$

და შემდეგ პოლარიზაციის სიმკვრივისთვის:

$$\vec{P} = n \vec{d} = -\frac{n e^2}{m \omega^2} \vec{E}$$

სადაც n ელექტრონების კონცენტრაციაა მეტალში. საბოლოოდ კი განმარტებიდან $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \equiv \epsilon_m \epsilon_0 \vec{E}$ მივიღებთ ელექტრული შეღწევადობის გამოსახულებას მეტალში:

$$\epsilon_m = 1 - \frac{n e^2}{\epsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

და ელექტრული შეღწევადობის გამოსახულებას დიელექტრიკისთვის:

$$\epsilon_d = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

სადაც

$$\omega_p^2 = \frac{n e^2}{\epsilon_0 m}; \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}$$

(0.5 ქულა)

A.2 პლაზმური სიხშირის რიცხვითი მნიშვნელობის გამოთვლა: თავისუფალი ელექტრონების კონცენტრაცია სპილენძში არის $n = 8.5 \cdot 10^{28} m^{-3}$, ელექტრონის მუხტია $e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$, ელექტრონის მასაა $m = 9.1 \cdot 10^{-31} kg$ და ელექტრული მუდმივაა $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} F/m$. გვაქვს:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{\epsilon_0 m}} = \sqrt{\frac{1.6^2 \cdot 8.5 \cdot 10^{-10}}{8.85 \cdot 9.1 \cdot 10^{-43}}} = 1.64 \cdot 10^{16} s^{-1}$$

(0.5 ქულა)

B.1 ახლა განვიხილოთ ტალღური განტოლება ელექტრული ველისთვის:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0; \quad (1)$$

ჩვენ უნდა ვეძებოთ ტალღური ამონახსნი ელექტრული ველის რომელიმე

კომპონენტისთვის (ვთქვათ, x -თვის) შემდეგი ფორმით:

$E_x^d = E_0 \sin(kx - \omega t) e^{-p_d z}$ თუ $z > 0$ და $E_x^m = E_0 \sin(kx - \omega t) e^{p_m z}$ თუ $z < 0$ (2)
 თუ (2) -ს ჩავსვამთ (1) -ში, მივიღებთ დისპერსიულ თანაფარდობებს დიელექტრიკსა და მეტალში:

$$\epsilon_d \omega^2 = c^2 (k^2 - p_d^2), \quad \epsilon_m \omega^2 = c^2 (k^2 - p_m^2) \quad (3)$$

(0.5 ქულა)

B.2 ახლა დავაკავშიროთ ერთმანეთთან ელექტრული ველის კომპონენტები E_x^d და E_z^d დიელექტრიკში და E_x^m და E_z^m მეტალში. ამისთვის ვიყენებთ გაუსის კანონს დიფერენციალური ფორმით:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

თუ ჩავსვამთ ამაში (2) -ს, მივიღებთ დიელექტრიკსა და მეტალში:

$$E_z^d = E_0 \frac{k}{p_d} \cos(kx - \omega t) e^{-p_d z} \text{ თუ } z > 0; \quad E_z^m = -E_0 \frac{k}{p_m} \cos(kx - \omega t) e^{p_m z} \text{ თუ } z < 0 \quad (4)$$

(0.5 ქულა)

B.3 ახლა D_z^d და D_z^m გადაბმის პირობიდან გამოვთვალოთ ϵ_d და ϵ_m გვექნება:

$$\frac{\epsilon_d}{p_d} + \frac{\epsilon_m}{p_m} = 0 \quad (5)$$

(1.0 ქულა)

რაც (3) დისპერსიის თანაფარდობებთან ერთად სრულიად საკმარისია პლაზმონ-პოლარიტონის $\omega(k)$ დამოკიდებულების დასადგენად. მართლაც, თუ (5) თანაფარდობას გამოვიყენებთ და ჩავსვამთ (3)-ის მარჯვენა განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\epsilon_d \omega^2 = c^2 (k^2 - p_d^2), \quad \epsilon_m \omega^2 = c^2 \left(k^2 - p_d^2 \frac{\epsilon_m^2}{\epsilon_d^2} \right) \quad (6)$$

და საბოლოოდ:

$$\epsilon_m \omega^2 \left(1 - \frac{\epsilon_m}{\epsilon_d} \right) = c^2 k^2 \left(1 - \frac{\epsilon_m^2}{\epsilon_d^2} \right) \Rightarrow \omega^2 = \frac{c^2 k^2}{\epsilon_m} \left(1 + \frac{\epsilon_m}{\epsilon_d} \right) \quad (7)$$

ხოლო დისპერსიისთვის გვექნება

$$k^2 = \frac{\omega^2 \epsilon_m \epsilon_d}{c^2 (\epsilon_m + \epsilon_d)} = \frac{\omega^2 (\omega^2 - \omega_p^2) \epsilon_d}{c^2 (\omega^2 - \omega_p^2 + \omega^2 \epsilon_d)}$$

(0.5 ქულა)

B.4 მეტალის სიღრმეში არ უნდა გვქონდეს ტალღის გავრცელება, ამიტომ უნდა განვიხილოთ ისეთი სიხშირეები, რომლებისთვისაც $\epsilon_m < 0$ და აქედან გამომდინარე, (7)-ს რომ ამონახსნი ჰქონდეს, უნდა დაკმაყოფილდეს შემდეგი პირობა:

$$1 + \frac{\epsilon_m}{\epsilon_d} < 0 \Rightarrow \epsilon_m < -\epsilon_d \Rightarrow 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} < -\epsilon_d \Rightarrow \omega^2 < \frac{\omega_p^2}{1 + \epsilon_d}$$

(0.5 ქულა)

B.5 გადავიდეთ რიცხვით შეფასებაზე. ვთქვათ გვაქვს ტალღის სიხშირე, რომელიც ტოლია $\omega = 0.2\omega_p$. უნდა გავიგოთ პლაზმონ-პოლარიტონის გავრცელების ტალღური რიცხვი k და შეღწევადობის სიღრმეები $\Lambda_m = 1/p_m$ მეტალში და $\Lambda_d = 1/p_d$ დიელექტრიკში. დიელექტრიკად განვიხილოთ მინა $\epsilon_d = 2$ და ავილოთ სინათლის სიჩქარე $c = 3 \cdot 10^8$ მ/წმ. დისპერსიული თანაფარდობიდან ვღებულობთ:

$$k = \frac{1.64 \cdot 10^{16}}{3 \cdot 10^8} \sqrt{\frac{0.2^2(0.2^2 - 1) \cdot 2}{(0.2^2 - 1 + 0.2^2 \cdot 2)}} = 1.61 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

$$p_m = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} = \sqrt{1.61^2 \cdot 10^{14} - \frac{1.64^2 \cdot (0.2^2 - 1)}{3^2} \cdot 10^{16}} = 5.5 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

$$p_d = \sqrt{k^2 - \frac{\epsilon_d \omega^2}{c^2}} = \sqrt{1.61^2 \cdot 10^{14} - \frac{0.2^2 \cdot 1.64^2 \cdot 2}{3^2} \cdot 10^{16}} = 0.45 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

შესაბამისად შეღწევის სიღრმე მეტალში და დიელექტრიკში გამოდის:

$$\Lambda_m = 1/p_m = 1.8 \cdot 10^{-8} \text{ m}; \quad \Lambda_d = 1/p_d = 2.2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

(1.0 ქულა)

C.1 ახლა განვიხილოთ მეტალის ფირფიტა, რომლის ორივე მხარეს ჰაერია და ვიპოვოთ იგივე ტიპის პლაზმონ-პოლარიტონული ამოხსნები, ანუ ელექტრომაგნიტური ველის ისეთი განაწილება, როცა ფირფიტისგან დაშორებასთან ერთად ველები ექსპონენციალურად კლებულობს. ვთქვათ, ფირფიტის სისქეა a და ავილოთ $z = 0$ წერტილი ფირფიტის შუაში. მაშინ მეტალში გვექნება შემდეგი ტიპის განაწილება ელექტრული ველის x და z კომპონენტებისთვის:

$$E_x^m = E_{01} \sin(kx) e^{p_m z} + E_{02} \sin(kx) e^{-p_m z} \quad \text{თუ } |z| < a/2$$

(0.5 ქულა)

ხოლო დიელექტრიკისთვის შეგვიძლია დავწეროთ E_x^m და E_x^d -ს გადაბმის პირობებიდან გამყოფ ზედაპირებზე:

$$E_x^d = (E_{01} e^{p_m a/2} + E_{02} e^{-p_m a/2}) e^{p_d a/2} \sin(kx) e^{-p_d z} \quad \text{თუ } z > a/2$$

$$E_x^d = (E_{01} e^{-p_m a/2} + E_{02} e^{p_m a/2}) e^{-p_d a/2} \sin(kx) e^{p_d z} \quad \text{თუ } z < -a/2$$

(0.5 ქულა)

C.2 როგორც წინა **B.2** პუნქტში, ასევე შეგვიძლია ვიპოვოთ გაუსის კანონიდან ელექტრული ველის z კომპონენტისთვისაც:

$$E_z^m = -\frac{k}{p_m} (E_{01} \cos(kx) e^{p_m z} - E_{02} \cos(kx) e^{-p_m z}) \quad \text{თუ } |z| < a/2$$

$$E_z^d = \frac{k}{p_d} (E_{01} e^{p_m a/2} + E_{02} e^{-p_m a/2}) e^{p_d a/2} \cos(kx) e^{-p_d z} \quad \text{თუ } z > a/2$$

$$E_z^d = -\frac{k}{p_d} (E_{01} e^{-p_m a/2} + E_{02} e^{p_m a/2}) e^{-p_d a/2} \cos(kx) e^{p_d z} \quad \text{თუ } z < -a/2$$

(0.5 ქულა)

C.3 დაგვრჩა ახლა ელექტრული ინდუქციის z კომპონენტების გადაბმა, საიდანაც

ვიღებთ ორ პირობას:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_m}{p_m} (E_{01} e^{p_m a/2} - E_{02} e^{-p_m a/2}) + \frac{\epsilon_d}{p_d} (E_{01} e^{p_m a/2} + E_{02} e^{-p_m a/2}) &= 0 \\ \frac{\epsilon_m}{p_m} (E_{01} e^{-p_m a/2} - E_{02} e^{p_m a/2}) - \frac{\epsilon_d}{p_d} (E_{01} e^{-p_m a/2} + E_{02} e^{p_m a/2}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{01} e^{p_m a/2} \left(\frac{\epsilon_m}{p_m} + \frac{\epsilon_d}{p_d} \right) - E_{02} e^{-p_m a/2} \left(\frac{\epsilon_m}{p_m} - \frac{\epsilon_d}{p_d} \right) &= 0 \\ E_{01} e^{-p_m a/2} \left(\frac{\epsilon_m}{p_m} - \frac{\epsilon_d}{p_d} \right) - E_{02} e^{p_m a/2} \left(\frac{\epsilon_m}{p_m} + \frac{\epsilon_d}{p_d} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$e^{p_m a/2} \left(\frac{\epsilon_m}{p_m} + \frac{\epsilon_d}{p_d} \right) \pm \left(\frac{\epsilon_m}{p_m} - \frac{\epsilon_d}{p_d} \right) e^{-p_m a/2} = 0$$

$$\frac{\epsilon_m}{p_m} \tanh(p_m a/2) = -\frac{\epsilon_d}{p_d}, \quad \frac{\epsilon_m}{p_m} = -\tanh\left(\frac{p_m a}{2}\right) \frac{\epsilon_d}{p_d} \quad (8)$$

(1.5 ქულა)

C.4 ზღვარში $a \rightarrow 0$ გვაქვს $\tanh(p_m a/2) \rightarrow p_m a/2$ და (8) -ის პირველი განტოლება გვაძლევს:

$$\frac{a \epsilon_m}{2} = -\frac{\epsilon_d}{p_d}$$

ჩავსვათ აქ ϵ_m და p_d -ს გამოსახულებები და მივიღებთ:

$$\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \sqrt{k^2 - \frac{\epsilon_d \omega^2}{c^2}} = -\frac{2\epsilon_d}{a}$$

მარჯვენა მხარე უსასრულოდ დიდია $a \rightarrow 0$ ზღვარში, ამიტომ ფესვის შიგნით მხოლოდ k^2 შეგვიძლია დავიტოვოთ, ასევე თუ ავიღებთ მცირე სიხშირეებს $\omega^2 \ll \omega_p^2$ საბოლოოდ ამ შტოს დისპერსიისთვის მივიღებთ:

$$k = \frac{2\omega^2 \epsilon_d}{a\omega_p^2}$$

თუ ჩავწერთ, როგორც $k = R\omega^2/a$, და ჰერისთვის $\epsilon_d = 1$, მაშინ

$$R = \frac{2}{\omega_p^2}$$

(1.5 ქულა)

C.5 ხოლო თუ განვიხილავთ (8)-ის მეორე განტოლებას იგივე $a \rightarrow 0$ ზღვარში, გვექნება:

$$\frac{\epsilon_m}{p_m} = -\frac{\epsilon_d p_m a}{2p_d}$$

და თუ გვინდა, რომ ეს განტოლება დაკმაყოფილდეს $a \rightarrow 0$ ზღვარში, მაშინ უნდა $p_d \rightarrow 0$ და გვექნება:

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_d}$$

(0.5 ქულა)

ანუ ვიღებთ იგივე დისპერსიულ თანაფარდობას, რაც გვქონდა უსასრულო დიელექტრიკში მეტალის ფირფიტის გარეშე.

ამოცანა #3 -ის ამოხსნა და შეფასების სქემა: ელექტრომაგნიტური ველების ფარდობითობა

A1. ელექტრული და მაგნიტური ველები გამოითვლება ცნობილი ფორმულებიდან:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\rho}{\epsilon_0} dV; \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

ამ ველების არანულოვანი გეგმილები კოორდინატა სათავის ცენტრიდან r მანძილზე და y ღერძზე შემდეგ მნიშვნელობებს მიიღებს:

$$E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \rho A; \quad B_z = \frac{\mu_0}{2\pi r} J A,$$

ხოლო z ღერძზე და ცენტრიდან r მანძილზე გვექნება:

$$E_z = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \rho A; \quad B_y = -\frac{\mu_0}{2\pi r} J A.$$

(0.3 ქულა)

A2. q მუხტზე მოქმედი ლორენცის ძალა უძრავ ათვლის სისტემაში $\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}]$,

$$F_y = q \frac{\mu_0}{2\pi r} |\rho_-| v^2 A = q \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r c^2} |\rho_-| v^2 A$$

სადაც გავითვალისწინეთ, რომ $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$.

(0.2 ქულა)

ანუ დადებით საცდელ q მუხტზე მოქმედი ძალა y ღერძის მიმართულებითაა, ანუ დადებითი მუხტი განიზიდება გამტარისგან.

A3. საქმე სხვანაირადაა მოძრავი უარყოფითი მუხტების შემთხვევაში. ეს მუხტები გამტარის მიმართ უძრავ ათვლის სისტემაში იმყოფებიან L_0 სიგრძის ცილინდრში, რომელიც მოძრაობს v სიჩქარით. ამოცანა ასე ისმება, რა სიგრძისაა ეს ცილინდრი გამტარის მიმართ u სიჩქარით მოძრავ ათვლის სისტემაში. პირველ ყოვლისა, აღვნიშნოთ, რომ ამ სისტემაში უარყოფითი მუხტებით სავსე ცილინდრი მოძრაობს სიჩქარით

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

და შემოვიტანთ კიდევ ისეთი სისტემა, რომელშიც უარყოფითად დამუხტული ნაწილაკებით სავსე ცილინდრი გაჩერებულია და აღვნიშნოთ ცილინდრის სიგრძე ამ სისტემაში L -ით. მაშინ თუ შევადარებთ ამ სისტემაში სიგრძეს გამტართან დაკავშირებულ უძრავ ათვლის სისტემაში L_0 სიგრძესთან, გვექნება:

$$L_0 = L\sqrt{1 - (v/c)^2}$$

ხოლო თუ შევადარებთ L_0 სიგრძეს v' სიჩქარით მოძრავ სისტემაში (რომელიც გამტართან დაკავშირებულ ათვლის სისტემის მიმართ u სიჩქარით მოძრაობს) გაზომილ L' სიგრძესთან, გვექნება:

$$L' = L\sqrt{1 - (v'/c)^2}$$

(0.3 ქულა)

თუ ამ ბოლო ორ ტოლობას შევადარებთ, გვექნება, რომ

$$L' = L_0 \frac{\sqrt{1 - (v'/c)^2}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = L_0 \frac{\sqrt{1 - (u/c)^2}}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

ამიტომ ისევე როგორც დადებითი მუხტების შემთხვევაში თუ გამოვიყენებთ

$$L_0 \rho_- = L' \rho'_-$$

მივიღებთ:

$$\rho'_- = \frac{\rho_- \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

და თუ განვიხილავთ $u = v$ შემთხვევას, გვექნება:

$$\rho'_- = \rho_- \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

(0.7 ქულა)

ანუ უარყოფითი მუხტის სიმკვრივე შემცირდება მოძრავ ათვლის სისტემაში.

A4. რადგან უძრავ ათვლის სიტემაში გამტარი ნეიტრალურია, ესე იგი

$$\rho_- = -\rho_+$$

ამიტომ ჯამური მუხტის სიმკვრივისთვის მოძრავ ათვლის სისტემაში გვაქვს:

$$\rho' = \rho'_- + \rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + \rho_- \sqrt{1 - (v/c)^2} = \rho_+ \frac{(v/c)^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

(0.5 ქულა)

რაც ძალიან მცირე სიდიდეა, მაგრამ საკმარისია ჩვენი პარადოქსის ამოსახსნელად.

A5. ამგვარად გვაქვს დადებითად დამუხტული გამტარი მოძრავ ათვლის სიტემაში და პირველი კარგი ამბავი ისაა, რომ ამ სისტემაშიც გვაქვს q საცდელ დადებით მუხტზე მოქმედი გამზიდავი ძალა კულონის კანონის მიხედვით. ხოლო როდენობრივად კი თუ ვიანგარიშებთ დამუხტული წრფივი გამტარის ელექტრულ ველს q მუხტის მდებარეობის წერტილში, გვექნება ;

$$E'_y = \frac{\rho'}{2\pi\epsilon_0 r} A = \rho_+ \frac{(v/c)^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \frac{A}{2\pi\epsilon_0 r}$$

ხოლო q მუხტზე მოქმედი ძალისთვის მოძრავ ათვლის სისტემაში გვექნება:

$$F'_y = q \frac{\mu_0}{2\pi r} |\rho_-| v^2 A \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

და მივიღებთ:

$$\frac{F'_y}{F_y} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

(1.5 ქულა)

რაც ემთხვევა ძალის მართობული (მოძრავი ათვლის სისტემის სიჩქარის მიმართ) მდგენელის გარდაქმნის კანონს. ეს კანონი მარტივად შეიძლება გამოვიყვანოთ ფორმულიდან

$$F_y = \frac{dp_y}{dt} \quad F'_y = \frac{dp'_y}{dt'}$$

და რადგან იმპულსის მართობული მდგენელი არ გარდაიქმნება, ანუ $p_y = p'_y$,

ხოლო დრო კი გარდაიქმნება შემდეგნაირად: $t' = t\sqrt{1 - (v/c)^2}$, გამოდის, რომ

$$F'_y = \frac{F_y}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

B1. ახლა განვიხილოთ მხოლოდ ერთი სახეობის (ვთქვათ, დადებითი) ρ სიმკვრივის მუხტები, რომლებიც მოძრაობენ უძრავი ათვლის სისტემის მიმართ v სიჩქარით და არიან მოთავსებული ამავე სიჩქარით მოძრავ L_0 სიგრძის წარმოსახვით ცილინდრში. მაშინ იმ ათვლის სისტემაში, რომელიც u სიჩქარით მოძრაობს უძრავი ათვლის სისტემის მიმართ, გვექნება შემდეგი ρ' მუხტის სიმკვრივის მნიშვნელობა, თუ გამოვიყენებთ წინა პუნტში მიღებულ შედეგს:

$$\rho' = \frac{\rho \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

(0.5 ქულა)

ახლა თუ აღვნიშნავთ დენის სიმკვრივეს უძრავ ათვლის სისტემაში, როგორც

$$J = \rho v$$

მუხტის გარდაქმნის კანონი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\rho' = \rho \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} - J \frac{u/c^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

(0.5 ქულა)

B2. ესაა მუხტის სიმკვრივის გარდაქმნის კანონი ერთი სისტემიდან მეორეში გადასვლისას, ახლა გამოვიყვანოთ დენის სიმკვრივის გარდაქმნის კანონი. თუ შევნიშნავთ, რომ მოძრავ ათვლის სისტემაში დენის სიმკვრივე განიმარტება როგორც

$$J' = \rho' v'$$

ხოლო ჩვენ კი უკვე გვაქვს მიღებული შემდეგი თანაფარდობები

$$\rho' = \frac{\rho \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}, \quad v' = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

გვექნება:

$$J' = \rho' v' = \frac{\rho v - \rho u}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

ანუ

$$J' = J \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} - \rho \frac{u}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

(1.5 ქულა)

B3. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა დამუხტული ნაწილაკების სიჩქარე v უძრავ ათვლის სისტემაში და მოძრავი ათვლის სისტემის სიჩქარე u არაა ერთი ღერძის გასწვრივ მიმართული. ავიღოთ u -ს მიმართულება x ღერძის გასწვრივ, ხოლო v არის ნებისმიერი მიმართულებით. ასეთ შემთხვევაში მოძრავ ათვლის სისტემაზე გადასვლისას მხოლოდ x ღერძის მიმართულებით იცვლება სიგრძეები, რომლის მიმართაც მუხტები v_x სიჩქარით გადაადგილდებიან. ანუ გვაქვს

თითქმის იგივე ფორმულა L_x -სთვის, ოღონდ ახლა v -ს მაგივრად გვქვია v_x , სიგრძის სხვა კომპონენტები კი უცვლელი დავტოვებთ:

$$L'_x = L_{0x} \frac{\sqrt{1 - (u/c)^2}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \quad L'_y = L_{0y} \quad L'_z = L_{0z}$$

ხოლო \vec{v} სიჩქარის მდგენელები კი შემდეგნაირად გარდაიქმნება:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \quad v'_y = v_y \frac{\sqrt{1 - (u/c)^2}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \quad v'_z = v_z \frac{\sqrt{1 - (u/c)^2}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

ამ ყველაფრის მიხედვით მუხტების და დენის სიმკვრივები გარდაიქმნებიან შემდეგნაირად:

$$\rho' = \frac{\rho}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} - \frac{J_x u/c^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}; \quad J'_x = \frac{J_x}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} - \frac{\rho u}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}; \quad J'_y = J_y; \quad J'_z = J_z$$

(2.0 ქულა)

C1. ახლა რაც დავტოვებთ არის ამ მუხტების და დენის სიმკვრივების მიერ შექმნილი ელექტრული და მაგნიტური ველების ფარდობითობის დადგენა. აქედან გამომდინარე J_y და J_z დენების მიერ შექმნილი ველები არ გარდაიქმნებიან, x ღერძის მიმართულებით მოძრავ ათვლის სისტემაში გადასვლისას იცვლება მხოლოდ J_x დენი და დენის წარმომქმნელი მუხტის სიმკვრივე ρ .

ავიღოთ \vec{v} ვექტორი xy სიბრტყეში, (u ისევე x ღერძის გასწვრივ გვაქვს), მაშინ ველების არანულოვანი გეგმილები კოორდინატთა სათავის ცენტრიდან r მანძილზე და y ღერძზე შემდეგ მნიშვნელობებს მიიღებს:

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi r} J_x A; \quad E_y = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 r} A$$

ხოლო z ღერძზე და ცენტრიდან r მანძილზე გვქვია:

$$B_y = -\frac{\mu_0}{2\pi r} J_x A; \quad E_z = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 r} A$$

(0.5 ქულა)

რადგან J_x ვერ ქმნის ვერც მაგნიტურ და ვერც ელექტრულ ველს x ღერძის გასწვრივ (ასეთ ველებს მხოლოდ J_y და J_z დენები ქმნიან, ამიტომ არც მაგნიტური ველის და არც ელექტრული ველის x მდგენელები x ღერძის გასწვრივ მოძრავ ათვლის სისტემაში გადასვლისას არ გარდაიქმნებიან. საბოლოოდ მუხტისა და ველის გარდაქმნის პირობებში ამ ყველაფრის ჩასმით გვქვია:

$$E'_y = \frac{E_y - B_z u}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}; \quad B'_z = \frac{B_z - E_y u/c^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}; \quad E'_x = E_x;$$

$$E'_z = \frac{E_z + B_y u}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}; \quad B'_y = \frac{B_y - E_z u/c^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}; \quad B'_x = B_x;$$

(1.0 ქულა)

C2. ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$(\vec{E}')^2 - c^2(\vec{B}')^2 = (\vec{E})^2 - c^2(\vec{B})^2 \quad \text{და აგრეთვე} \quad (\vec{E}' \cdot \vec{B}') = (\vec{E} \cdot \vec{B})$$

(0.5 ქულა)