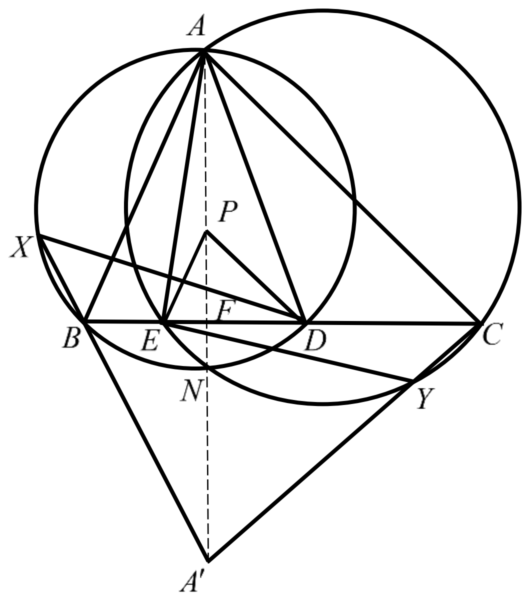
1. ABC მახვილკუთხა სამკუთხედის A წვეროდან დაშვებული სიმაღლის ფუძეა F წერტილი. AF მონაკვეთზე აღებულია P წერტილი. P წერტილზე გავლებულია AC და AB წრფეების პარალელური წრფეები, რომლებიც BC მონაკვეთს კვეთენ შესაბამისად D და E წერტილებში. A წერტილისაგან განსხვავებული X და Y წერტილები მდებარეობენ შესაბამისად ABD და ACE წრეწირებზე ისე, რომ $DA = DX$ და $EA = EY$. დაამტკიცეთ, რომ B, C, X და Y წერტილები ერთ წრეწირზე მდებარეობენ.

ამოხსნა



ვთქვათ A' არის BX და CY წრფეების გადაკვეთის წერტილი. ცხადია, რომ B, C, X და Y წერტილების ციკლურობის დასამტკიცებლად საკმარისი იქნება, თუ დავამტკიცებთ $A'B \cdot A'X = A'C \cdot A'Y$. ეს კი იმის ტოლფასია, რომ A' მდებარეობდეს $AXBD$ და $ACYE$ წრეწირების რადიკალურ ღერძზე.

$DA = DX$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ D წერტილი $AXBD$ წრეწირში XDA რკალს შუაზე ყოფს, ამიტომ $\angle ABD = \angle A'BD$.

ანალოგიურად, $EA = EY$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ E წერტილი $ACYE$ წრეწირში AEY რკალს შუაზე ყოფს, ამიტომ $\angle ACE = \angle A'CE$. ამრიგად A და A' წერტილები არიან სიმეტრიული BC წრფის მიმართ, ამიტომ A, A' და F წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობს.

$PE \parallel AB$ და $PD \parallel AC$ პირობების გამო $\dfrac{FD}{FC} = \dfrac{FP}{FA} = \dfrac{FE}{FB}$, საიდანაც $FB \cdot FD = FC \cdot FE$.

ამიტომ F წერტილის ხარისხი $AXBD$ და $ACYE$ წრეწირების მიმართ ტოლია. ამრიგად

$AXBD$ და $ACYE$ წრეწირების რადიკალური ღერძია AF წრფე, რომელიც ასევე გაივლის A' წერტილზე. რ.დ.გ.

ამოხსნის ეტაპები

ა) განიხილა BX და CY წრფეების გადაკვეთის წერტილი A';
ბ) დაადგინა, რომ $\angle ABD = \angle A'BD$ და $\angle ACE = \angle A'CE$;
გ) დაადგინა, რომ A, A' და F წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობს;
დ) დაადგინა, რომ $\frac{FD}{FC} = \frac{FP}{FA} = \frac{FE}{FB}$;
ე) მიიღო $FB \cdot FD = FC \cdot FE$;
ვ) დაადგინა, რომ $AXBD$ და $ACYE$ წრეწირების რადიკალური ღერძია AF წრფე, რომელიც
ასევე გაივლის A' წერტილზე.
ზ) მიიღო $A'B \cdot A'X = A'C \cdot A'Y$ და აღნიშნა, რომ ეს B, C, X და Y წერტილების ციკლურობის ტოლფასია.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ)
3ქ- ა) , ბ), გ)
4ქ- ა), ბ), გ), დ)
5ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
6ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

2. 2022 ცალი რიცხვისგან შედგენილ $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ მიმდევრობას ვუწოდოთ *კარგი,* თუ ამ მიმდევრობის თითოეული წევრი არის 1 ან -1 . იპოვეთ უდიდესი რიცხვი C ისეთი, რომ ნებისმიერი კარგი მიმდევრობისთვის არსებობს მთელი დადებითი რიცხვი k და ინდექსები $1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq 2022$ ისეთი, რომ ყოველი i-თვის $t_{i+1} - t_i \leq 2$ და

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a_{t_i}\right| \geq C.$$

ამოხსნა

ნებისმიერი კარგი მიმდევრობა შეიცავს სულ მცირე 1011 ცალ 1- ს ან 1011 ცალ -1-ს. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ ის შეიცავს 1011 ცალ 1-ს. განვიხილოთ შემდეგი ქვემიმდევრობა: ყველაზე მარცხნივ მდგომი 1 იყოს ამ ქვემიმდევრობის პირველი წევრი. ასევე ეს ქვემიმდევრობა შეიცავდეს ყველა 1-იანს. ქვემიმდევრობის პირველი წევრიდან დავიწყოთ მოძრაობა მარცხნიდან მარჯვნივ და როცა შეგვხვდება -1 ის ამ ქვემიმდევრობაში არ შევიყვანოთ, თუ ამის საშუალება გვაქვს, ანუ $a_t = -1$ არ შეგვყავს ქვემიმდევრობაში, თუ a_{t-1} უკვე მივაკუთვნეთ ამ ქვემიმდევრობას. შევნიშნოთ, რომ ასეთნაირად აგებულ ქვემიმდევრობაში ყოველი -1-თვის არსებობს ერთი ცალი -1, რომელიც ამ ქვემიმდევრობაში არ შევიყვანეთ. ეს ნიშნავს, რომ ყველაზე მეტი ეს ქვემიმდევრობა შეიცავს $\left[\frac{1011}{2}\right] = 505$ ცალ -1 იანს. ამრიგად ამ ქვემიმდევრობის გასწვრივ ჯამი იქნება სულ მცირე 1011-505=506 და ამიტომ $C \geq 506$.

ახლა მოვიყვანოთ ისეთი კარგი მიმდევრობის მაგალითი, რომელშიც ნებისმიერი დასაშვები ქვემიმდევრობა, ანუ ისეთი $1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq 2022$ ქვემიმდევრობა, რომლისთვისაც ყოველი i-თვის $t_{i+1} - t_i \leq 2$, აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობათა ჯაჭვს $-506 \leq \sum_{i=1}^{k} a_{t_i} \leq 506$. ეს კი ზემოთ მიღებულ შეფასებასთან ერთად მოგვცემს, რომ ამოცანის პასუხია $C = 506$.

განვიხილოთ შემდეგი კარგი მიმდევრობა:

$$\{-1\}, \{1,1\}, \{-1,-1\}, \{1,1\}, \{-1,-1\}, \dots, \{1,1\}, \{-1,-1\}, \{1\},$$

რომელიც ფიგურული ფრჩხილების გამოყენებით დაყოფილია ბლოკებად. სულ გვაქვს 1012 ბლოკი. პირველი და ბოლო ბლოკი ერთ რიცხვს შეიცავს, ხოლო დანარჩენები- ორს. ამრიგად, სულ გვაქვს 506 ბლოკი, რომელიც მხოლოდ -1-ს შეიცავს და 506 ბლოკი, რომელიც მხოლოდ 1-ს შეიცავს. ახლა განვიხილოთ ნებისმიერი დასაშვები ქვემიმდევრობა. ვთქვათ მასში 1-ები აღებულია k ცალი ბლოკიდან. ცხადია, რომ ყოველი $\{-1,-1\}$ ბლოკიდან, თუ ის დასაშვები ქვემიმდევრობის ორ 1-იანს შორის იმყოფება, დასაშვებ ქვემიმდევრობაში უნდა

გვქონდეს ერთი მაინც -1. ამრიგად ვღებულობთ, რომ ამ დასაშვები ქვემიმდევრობის გასწვრივ ჯამი არ აღემატება $2k-(k-1)=k+1$.

თუ $k<506$, მაშინ $k+1\leq 506$. თუ $k=506$, მაშინ ეს ნიშნავს რომ ერთი ცალი 1-იანი აღებულია ბოლო ბლოკიდან, რომელშიც მხოლოდ ერთი რიცხვია და ამიტომ დასაშვები ქვემიმდევრობის გასწვრივ ჯამი არ აღემატება $2(k-1)+1-(k-1)=k=506$. ამრიგად დავამტკიცეთ უტოლობა $\sum_{i=1}^{k} a_{t_i}\leq 506$. ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $-506\leq\sum_{i=1}^{k} a_{t_i}$. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

პასუხი: $C=506$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) განიხილა ქვემიმდევრობა, რომელიც შეიცავს ყველა ერთ ნიშნიან წევრს, და შენიშნა, რომ მოპირდაპირე ნიშნიანი a_t წევრის გამოტოვება შესაძლებელია თუ a_{t-1} ქვემიმდევრობის წევრია;
ბ) შენიშნა, რომ აგებულ ქვემიმდევრობაში ყოველი -1-თვის არსებობს ერთი ცალი -1, რომელიც ამ ქვემიმდევრობას არ ეკუთვნის;
გ) შეაფასა -1-ების მაქსიმალური რაოდენობა და დაასკვნა, რომ $C\geq 506$;
დ) განიხილა $-1,1,1,-1,-1,\dots,1,1,-1,-1,1$ ტიპის კარგი მიმდევრობა და დაყო ის ბლოკებად;

ე) დაადგინა, რომ განხილულ კარგ მიმდევრობაში, ყოველი დასაშვები ქვემიმდევრობის გასწვრივ ჯამი არ აღემატება $k+1$-ს;

ვ) განიხილა ორი შემთხვევა, $k<506$ და $k=506$ და მიიღო შეფასება $\sum_{i=1}^{k} a_{t_i}\leq 506$;
ზ) აღნიშნა, რომ ანალოგიურად მართებულია $-506\leq\sum_{i=1}^{k} a_{t_i}$ შეფასება და მიიღო პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ)
3 ქ- ა) , ბ), გ)
4 ქ- ა), ბ), გ), დ)
5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

3. ვთქვათ $k \geq 2$ რაიმე მთელი რიცხვია. იპოვეთ უმცირესი მთელი რიცხვი $n \geq k+1$, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისება: არსებობს ერთმანეთისაგან განსხვავებული n ნამდვილი რიცხვისგან შედგენილი სიმრავლე ისეთი, რომ ამ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი შეგვიძლია ჩავწეროთ ამავე სიმრავლის k ცალი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ელემენტის ჯამის სახით.

ამოხსნა

ვაჩვენოთ, რომ ამოცანის პასუხია $n = k + 1$.

ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $k = 2l$, სადაც $l \geq 1$. ვთქვათ $A_i = \{-i, i\}$ და $A = \{0\} \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_l$. ცხადია A სიმრავლე შედგება $k + 1 = 2l + 1$ რიცხვისგან. შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან A ნულის მიმართ სიმეტრიული სიმრავლეა, ამიტომ თუ i წარმოდგება შესაბამისი ჯამის სახით, მაშინ ტოლობის ორივე მხარის -1 ზე გამრავლებით, მივიღებთ, რომ $-i$ ასევე წარმოდგება სასურველი ჯამის სახით. ამრიგად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ყოველი i, სადაც $1 \leq i \leq l+2$, წარმოდგება A სიმრავლის $2l$ ელემენტის ჯამის სახით.

ყოველი i-თვის, ავიღოთ $0, i$, და ყველა ელემენტი $A \backslash \{-i, i\}$ სიმრავლიდან. ცხადია გვექნება $i = i + 0 + \sum_{j \in A \backslash (\{-i,i\} \cup \{0\})} j$ და ამასთან ტოლობის მარჯვენა მხარეში გვაქვს ზუსტად $k = 2l$ ერთმანეთისაგან განსხვავებული ელემენტი.

თუ $k = 2l + 1$, მაშინ განვიხილოთ სიმრავლე $B = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_l \cup A_{l+1}$. ცხადია ეს სიმრავლე ასევე ნულის მიმართ სიმეტრიულია და შედგება $2l + 2 = k + 1$ ელემენტისგან. ცხადია ყოველი i -თვის, $1 \leq i \leq l+1$, სრულდება ტოლობა $i = i + \sum_{j \in B \backslash \{-i,i\}} j$ და ამასთან ტოლობის მარჯვენა მხარეში გვაქვს ზუსტად $2l + 1 = k$ ცალი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ელემენტი. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

პასუხი: $n = k + 1$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) მიხვდა, რომ ამოცანის პასუხია $n = k + 1$;
ბ) განიხილა შემთხვევა, როცა k ლუწია და შემოიღო $A_i = \{-i, i\}$ სიმრავლეები;
გ) განიხილა A სიმრავლე და შენიშნა, რომ A-ს სიმეტრიულობის გამო საკმარისია i -ს წარმოდგენა აჩვენო მხოლოდ დადებითი i-თვის;

დ) აჩვენა, რომ A-ს ყოველი ელემენტი წარმოიდგინება როგორც A სიმრავლის ერთმანეთისაგან განსხვავებული k ელემენტის ჯამის სახით;

ე) განიხილა შემთხვევა, როცა k კენტია და შემოიღო B სიმრავლე;

ვ) აღნიშნა, რომ B-ს სიმეტრიულობის გამო საკმარისია i -ს წარმოდგენა აჩვენო მხოლოდ დადებითი i-თვის;
ზ) აჩვენა, რომ B-ს ყოველი ელემენტი წარმოიდგინება როგორც B სიმრავლის ერთმანეთისაგან განსხვავებული k ელემენტის ჯამის სახით და მიიღო პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ)
3 ქ- ა) , ბ), გ)
4 ქ- ა), ბ), გ), დ)
5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

4. ვთქვათ $a>1$ და $d>1$ არიან ურთიერთმარტივი ნატურალური რიცხვები. ვთქვათ $x_1=1$ და

$$x_{k+1}=\begin{cases} x_k+d, & \text{თუ } x_k \text{ არ იყოფა } a-\text{ზე} \\ \frac{x_k}{a}, & \text{თუ } x_k \text{ იყოფა } a-\text{ზე} \end{cases}$$

ყოველი ნატურალური $k\geq 1$-თვის.

იპოვეთ ნატურალური n რიცხვის უდიდესი შესაძლო მნიშვნელობა, რომლისთვისაც არსებობს ისეთი ინდექსი k, რომ x_k იყოფა a^n-ზე.

ამოხსნა

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით მარტივი საჩვენებელია, რომ x_k და d ურთიერთმარტივი რიცხვებია. ასევე, შევნიშნოთ, რომ x_k მიმდევრობის ყოველი მომდევნო წევრის გამოთვლისას შემდეგი წევრის გაზრდა ზედიზედ მაქსიმუმ $(a-1)$-ჯერ შეიძლება მოხდეს. ამიტომ მათემატიკური ინდუქციით მიიღება, რომ $x_k<da$, თუ $x_k=x_{k-1}+d$ და $x_k<d$, თუ $x_k=\dfrac{x_{k-1}}{a}$ ან $k=1$.

ვთქვათ a^{-k} არის a^k-ს ინვერსიული მოდულით d, ანუ m მთელი დადებითი რიცხვი სადარია a^{-k}-სი მოდულით d ($m\equiv a^{-k}\pmod{d}$), თუ $ma^k\equiv 1\pmod{d}$. შევნიშნოთ, რომ x_k მიმდევრობის ყოველი წევრი სადარია $1,a^{-1},a^{-2},\ldots$ სახის რიცხვებიდან რომელიმეს მოდულით d.

ვთქვათ n არის უდიდესი მთელი რიცხვი, რომლისთვისაც არსებობს ისეთი ინდექსი k, რომ x_k იყოფა a^n-ზე. ვთქვათ x_{k_0} არის მიმდევრობის პირველი ისეთი წევრი, რომ $x_{k_0}\equiv a^{-n}\pmod{d}$. მაშინ გვაქვს, რომ ან $k_0=1$, ან $x_{k_0}=\dfrac{x_{k_0-1}}{a}$. ორივე ამ შემთხვევაში გვაქვს $x_{k_0}<d<a^n<da$ და მაშასადამე $x_{k_0}\in\left\{a^n-d,a^n-2d,\ldots,a^n-(a-1)d\right\}$. ამ სიმრავლეში არცერთი ელემენტი არ იყოფა a-ზე, ამიტომ შემდეგ $a-1$-ე საფეხურზე მიმდევრობის წევრი გახდება a^n-ის ტოლი.

ამრიგად $d<a^n<da$, ე. ი. $n\in\left(\log_a d;1+\log_a d\right)$.

პასუხი: $n\in\left(\log_a d;1+\log_a d\right)$.

ამოხსნის ეტაპები

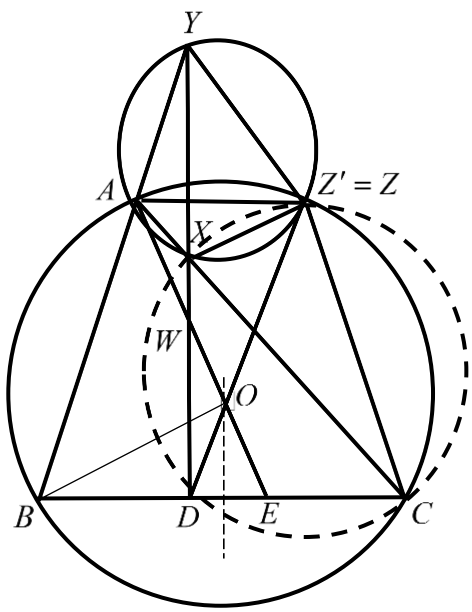
ა) დაადგინა, რომ x_k და d ურთიერთმარტივი რიცხვებია;
ბ) დაადგინა, რომ x_k მიმდევრობის ყოველი მომდევნო წევრის გამოთვლისას შემდეგი წევრი მაქსიმუმ $(a-1)$ -ჯერ შეიძლება გაიზარდოს;
გ) დაადგინა, რომ $x_k < da$, თუ $x_k = x_{k-1} + d$ და $x_k < d$, თუ $x_k = \frac{x_{k-1}}{a}$ ან $k = 1$;
დ) აღნიშნა, რომ x_k მიმდევრობის ყოველი წევრი სადარია $1, a^{-1}, a^{-2}, \dots$ სახის რიცხვებიდან რომელიმეს მოდულით d ;
ე) განიხილა x_{k_0} მიმდევრობის პირველი ისეთი წევრი, რომ $x_{k_0} \equiv a^{-n} \pmod d$;
ვ) მიიღო $x_{k_0} < d < a^n < da$;
ზ) მიიღო პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ)
3ქ- ა) , ბ), გ)
4ქ- ა), ბ), გ), დ)
5ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

5. ABC მახვილკუთხა სამკუთხედში $AC > AB$. ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრია O წერტილი. D წერტილი აღებულია BC მონაკვეთზე. D წერტილზე BC წრფისადმი გავლებული პერპენდიკულარი AO, AC და AB წრფეებს კვეთს შესაბამისად W, X და Y წერტილებში. AXY და ABC სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირები ერთმანეთს მეორედ კვეთენ Z წერტილში $(Z \neq A)$. დაამტკიცეთ, რომ თუ $OW = OD$, მაშინ DZ არის AXY სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის მხები.

ამოხსნა



ვთქვათ AO წრფე BC მონაკვეთს კვეთს E წერტილში. რადგან EDW მართკუთხა სამკუთხედია და $OW = OD$, ამიტომ $OE = OD$. ეს კი გვაძლევს, რომ D და E წერტილები არიან სიმეტრიული წერტილები BC მონაკვეთის შუამართობის მიმართ. გვაქვს

$$\angle ZCD = \angle ZAY = \angle ZXY = 180° - \angle DXZ,$$

ამიტომ $DXZC$ ოთხკუთხედი ციკლურია.

ABC სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირზე ავიღოთ Z' წერტილი ისე, რომ $AZ' \parallel BC$. შევნიშნოთ, რომ BAE და $CZ'D$ სამკუთხედები სიმეტრიულია BC მონაკვეთის შუამართობის მიმართ. ასევე თუ გავითვალისწინებთ, რომ A, O და E წერტილები ერთ წრფეზეა, გვექნება:

$\angle DZ'C = \angle BAE = \angle BAO = 90° - \frac{1}{2}\angle AOB = 90° - \angle ACB = \angle DXC$, ამიტომ $DXZ'C$ ოთხკუთხედი ციკლურია, ეს კი $DXZC$ ოთხკუთხედის ციკლურობასთან ერთად გვაძლევს, რომ $Z' = Z$.
$DXZC$ ოთხკუთხედის ციკლურობიდან და $AZ \parallel BC$ -დან გამომდინარეობს, რომ $\angle AZD = \angle CDZ = \angle CXZ = \angle AYZ$, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ DZ არის AXY სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის მხები. რ.დ.გ

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ D და E წერტილები არიან სიმეტრიული წერტილები BC მონაკვეთის
შუამართობის მიმართ;
ბ) დაადგინა, რომ $DXZC$ ოთხკუთხედი ციკლურია;
გ) დაადგინა, რომ BAE და $CZ'D$ სამკუთხედები სიმეტრიულია BC მონაკვეთის შუამართობის მიმართ;
დ) განიხილა Z' წერტილი ისე, რომ $AZ' \parallel BC$;
ე) დაადგინა, რომ $DXZ'C$ ოთხკუთხედი ციკლურია;
ვ) დაადგინა, რომ $Z' = Z$;
ზ) მიიღო $\angle AZD = \angle AYZ$ და დაასრულა დამტკიცება.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ)
3ქ- ა) , ბ), გ)
4ქ- ა), ბ), გ), დ)
5ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

6. ანო და ვანო თამაშობენ 2022×2022 კვატრატული ფორმის დაფაზე. თამაშს იწყებს ანო. ისინი რიგრიგობით აკეთებენ შემდეგ სვლებს:
   - ყოველ თავის ჯერზე ანო ირჩევს ნებისმიერ უჯრას და ამ უჯრაში და ამ უჯრის მოსაზღვრე ყველა უჯრაში (მაქსიმუმ 8 ცალ უჯრაში) ამატებს ერთ მონეტას. (ორ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ უჯრას ვუწოდებთ მოსაზღვრეს, თუ მათ საზღვრებს ერთი მაინც საერთო წერტილი აქვთ).
   - ვანო ყოველ თავის ჯერზე ირჩევს კვადრატის ერთმანეთისაგან განსხვავებულ ოთხ უჯრას და თითოეული ამ უჯრიდან, რომელიც მონეტას შეიცავს აკლებს თითო მონეტას.

უჯრას ვუწოდოთ *ძვირფასი* თუ ის შეიცავს სულ მცირე 10^6 მონეტას. განსაზღვრეთ უდიდესი რიცხვი K ისეთი, რომ როგორც არ უნდა ითამაშოს ვანომ, ანოს შეუძლია მიაღწიოს თამაშის რაღაც მომენტში იმას, რომ დაფაზე იქნება სულ მცირე K ცალი ძვირფასი უჯრა.

ამოხსნა

ამოცანა ამოვხსნათ $3N \times 3N$ დაფისთვის. ჯერ დავამტკიცოთ, რომ ვანოს შეუძლია ითამაშოს ისე, რომ დაფაზე არასდროს იქნება $5N^2$ -ზე მეტი ძვირფასი უჯრა. გადავნომროთ სტრიქონები ქვემოდან ზემოთ და მარცხნიდან მარჯვნივ რიცხვებით 1-დან $3N$-ის ჩათვლით.

·	·	·	·	·	·	·	·	·
		·			·			·
		·			·			·
·	·	·	·	·	·	·	·	·
		·			·			·
		·			·			·
·	·	·	·	·	·	·	·	·
		·			·			·
		·			·			·

მოვნიშნოთ ყოველი უჯრა წითელი ფერის წერტილით, თუ მისი ერთი მაინც კოორდინატი 3-ის ჯერადია. ამრიგად, თითოეული 3×3 კვადრატი შეიცავს 5 წითელ წერტილს და ოთხ არამონიშნულ უჯრას. ცხადია ვანოს შეუძლია იმოქმედოს ისე, რომ მისი სვლის შემდეგ არც ერთ არამონიშნულ უჯრაში მონეტა არ იდოს. აქედან გამომდინარე ძვირფასი უჯრების რაოდენობა ვერ გადააჭარბებს $5N^2$-ს.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ანოს შეუძლია ისე ითამაშოს, რომ რაღაც მომენტში დაფაზე იყოს არანაკლებ $5N^2$ ძვირფასი უჯრა.

გავაუმჯობესოთ ვანოს პირობები. კერძოდ მივცეთ მას უფლება, რომ თავის ყოველ ჯერზე მან აირჩიოს ანოს მიერ ბოლო სვლაზე დამატებული უჯრებიდან ოთხი უჯრა და ამ არჩეული ყოველი უჯრიდან თითო მონეტა აიღოს. ასევე მივცეთ უფლება, რომ მან აიღოს თითო მონეტა ყველა სხვა უჯრიდან (თუ ეს უჯრა ერთ მონეტას მაინც შეიცავს), რომლებსაც ანო ბოლო სვლაზე არ შეხებია. ცხადია, რომ თუ ამ ახალი წესების პირობებში ანო შეძლებს მიზნის მიღწევას, მაშინ ის შეძლებს მიზნის მიღწევას ძველი წესებითაც.

შევნიშნოთ, რომ თუ ანო აირჩევს რაიმე 3×3 ქვედაფას, მაშინ ვანოს სვლის შემდეგ ამ ქვედაფის რომელიღაც 5 უჯრაში თითო-თითოთი მოიმატებს მონეტების რაოდენობა, ხოლო დანარჩენ 4 უჯრაში მონეტების რაოდენობა უცვლელი დარჩება. ასევე ამ ქვედაფის გარეთ, ყველა უჯრა დაკარგავს თითო მონეტას (თუ ეს უჯრა ერთ მონეტას მაინც შეიცავდა). აღვნიშნოთ M-ით 9 ელემენტიანი სიმრავლის 5 ელემენტიანი ქვესიმრავლეების რაოდენობა, ანუ $M = C_9^5$.

შევნიშნოთ, რომ თუ ანო აირჩევს ზედიზედ $M \cdot k$-ჯერ ერთ და იგივე 3×3 ქვედაფას, მაშინ როგორც არ უნდა ითამაშოს ვანომ, ამ ქვედაფაში გვექნება უჯრათა ერთი ხუთეული მაინც, რომლის ყოველ უჯრაში იქნება არანაკლებ k მონეტა. ახლა დავყოთ $3N \times 3N$ დაფა N^2 ცალ 3×3 ქვედაფად და გადავნომროთ რიცხვებით, $0,1,2,\ldots, N^2-1$ ნებისმიერად.

ანოს სტრატეგია მდგომარეობს შემდეგში. ის ჯერ ირჩევს 3×3 ქვედაფას რომლის ნომერია N^2-1, შემდეგ N^2-2 და ა.შ.. როცა ის აირჩევს 3×3 ქვედაფას ნომრით n-ი, ის ამ არჩევანს გაიმეორებს $10^6 M(M+1)^n$-ჯერ. წინა შენიშვნის ძალით, როდესაც ანო მორჩება n ნომრიანი 3×3 ქვედაფის არჩევას, მაშინ იქ იქნება 5 მაინც უჯრა, თითოეული სულ მცირე $10^6(M+1)^n$ მონეტით. ამის შემდეგ, ყოველ არჩევაზე თითოეულ მათგანს დააკლდება თითო-თითო მონეტა. რადგანაც ანო მას შემდეგ რაც მორჩება n ნომრიანი 3×3 ქვედაფის არჩევას, გააკეთებს

$$10^6 M(M+1)^{n-1} + 10^6 M(M+1)^{n-2} + \cdots 10^6 M = 10^6((M+1)^n - 1)$$

სვლას, ამიტომ აღნიშნული 5 უჯრიდან თითოეულზე გვექნება $10^6 M(M+1)^n - 10^6((M+1)^n - 1) = 10^6$ მონეტა, ანუ გვექნება 5 ცალი მაინც ძვირფასი უჯრა. ამრიგად მივიღეთ, რომ ანო ამ სტრატეგიით მიაღწევს მომენტს, როდესაც დაფაზე იქნება სულ მცირე $5N^2$ ძვირფასი უჯრა. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

პასუხი: $K = 2271380$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) მოცემული 2022×2022 დაფა დაყო 3×3 ქვედაფებად და მიხვდა პასუხს;
ბ) აღწერა ვანოს თამაშის სტრატეგია და შეაფასა საძიებელი სიდიდე ზემოდან;
გ) მოახდინა თამაშის წესების მოდიფიცირება და აღნიშნა, რომ თუ ახალი წესების პირობებში ანო შეძლებს მიზნის მიღწევას, მაშინ შეძლებს ძველი წესებითაც;
დ) შენიშნა, რომ ვანოს სვლის შემდეგ 3×3 ქვედაფის რომელიღაც 5 უჯრაში მონეტების რაოდენობა თითოთი იმატებს, დანარჩენ 4-ში - უცვლელი რჩება და ყველა დანარჩენში თითოთი იკლებს;
ე) შენიშნა, რომ თუ ანო აირჩევს ზედიზედ $M \cdot k$-ჯერ ერთ და იგივე 3×3 ქვედაფას, მაშინ, არსებობს უჯრათა ხუთეული სადაც თითოში არანაკლებ k მონეტაა;
ვ) ქვედაფები გადანომრა რიცხვებით $0,1,2,\ldots, N^2-1$ და აღნიშნა, რომ n ნომრიანი დაფა ანომ უნდა აირჩიოს $10^6 M(M+1)^n$-ჯერ;
ზ) აჩვენა, რომ ანო მოცემული სტრატეგიით თითოეულ 3×3 ქვედაფაზე შექმნის სულ მცირე 5 ძვირფას უჯრას და მიიღო პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ)
3 ქ- ა) , ბ), გ)
4 ქ- ა), ბ), გ), დ)
5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)