

ამოცანა #1 -ის ამოხსნა და შეფასების სქემა: ტალღამტარების ფიზიკა

A.1 დავალებაში მოყვანილია განტოლებები კოჰერენტული ტალღისთვის

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \mu_0 \omega \vec{H}_0; \quad \vec{k} \times \vec{H}_0 = -\varepsilon_0 \omega \vec{E}_0; \quad \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0; \quad \vec{k} \cdot \vec{H}_0 = 0$$

თუ პირველ განტოლებას გავამრავლებთ ვექტორულად $\vec{k}$ -ზე და გამოვიყენებთ ორმაგი ვექტორული ნამრავლის ფორმულას და აგრეთვე გამოვიყენებთ მე-2 და მე-3 განტოლებას, ადვილად მივიღებთ:

$$k^2 \vec{E}_0 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \vec{E}_0$$

და რადგან $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$, მივიღებთ საბოლოოდ:

$$\omega^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

(0.5 ქულა)

A.2 პირველივე განტოლების გადაწერა $\vec{H}_0$ -ის სხვადასხვა მდგენელებისთვის იძლევა სასურველ შედეგს. მართლაც:

$$H_{0x} = \frac{k_y E_{0z} - k_z E_{0y}}{\mu_0 \omega}; \quad H_{0y} = \frac{k_z E_{0x} - k_x E_{0z}}{\mu_0 \omega}; \quad H_{0z} = \frac{k_x E_{0y} - k_y E_{0x}}{\mu_0 \omega}$$

(0.5 ქულა)

B.1 დაცემული და არეკვლილი ტალღების სუპერპოზიციიდან გვაქვს:

$$E_z = A \cos(\omega t - k_x x - k_z z) + B \cos(\omega t + k_x x - k_z z)$$

ხოლო (3) სასაზღვრო პირობა კი გვეუბნება, რომ იდეალური გამტარის ზედაპირებზე E_z ნულის ტოლი უნდა იყოს, რაც ავტომატურად გვაძლევს $A = -B$ და საბოლოოდ მივიღებთ:

$$E_z = 2A \sin(k_x x) \sin(\omega t - k_z z)$$

(0.5 ქულა)

ხოლო k_x იღებს შემდეგ მნიშვნელობებს: $k_x = \pi n/L$, სადაც $n = 1, 2, 3, 4 \dots$ და L ტალღამტარის სისქეა.

(0.5 ქულა)

B.2 ახლა თუ გამოვიყენებთ $k_y = 0$ და $H_z = 0$ პირობებს, (2)-ის პირველი განტოლებიდან ვიღებთ $E_y = 0$, ხოლო (2)-ის მესამე განტოლებიდან კი გვაქვს:

$$E_x = -2 \frac{k_z}{k_x} A \cos(k_x x) \cos(\omega t - k_z z)$$

(0.5 ქულა)

გადავიდეთ ახლა მაგნიტური ველის კომპონენტების გამოთვლაზე: თუ გამოვიყენებთ $k_y = 0$, $H_z = 0$ და $E_y = 0$ პირობებს, (2)-ის მეორე განტოლების y მდგენელის განხილვიდან გვაქვს $H_x = 0$. და ბოლოს, (2)-ის მეორე განტოლების x მდგენელის განხილვით ვიღებთ, რომ:

$$H_y = -2 \frac{\omega \varepsilon_0}{k_x} A \cos(k_x x) \cos(\omega t - k_z z)$$

(0.5 ქულა)

B.3 ზედაპირული მუხტებისა და დენებისათვის შეგვიძლია (3) სასაზღვრო პირობის მეორე და მესამე გამოსახულებები გამოვიყენოთ და შედეგად გვაქნება ტალღამტარის ქვედა ზედაპირზე, ანუ $x = 0$ -სთვის და ზედა ზედაპირზე $x = L$ -სთვის შემდეგი გამოსახულებები:

$$\begin{aligned}\rho_s(x=0) &= -2\varepsilon_0 \frac{k_z}{k_x} A \cos(\omega t - k_z z); & \rho_s(x=L) &= 2\varepsilon_0 \frac{k_z}{k_x} A \cos(\pi n) \cos(\omega t - k_z z) \\ J_s^z(x=0) &= -2\varepsilon_0 \frac{\omega}{k_x} A \cos(\omega t - k_z z); & J_s^z(x=L) &= 2\varepsilon_0 \frac{\omega}{k_x} A \cos(\pi n) \cos(\omega t - k_z z)\end{aligned}$$

(0.5 ქულა)

B.4 ახლა გადავიდეთ მართობული ელექტრული ველის (TE მოდა) შემთხვევის განხილვაზე, ესე იგი როდესაც $E_z = 0$. ეს პირობა (3) -ის მეორე განტოლების z კომპონენტის განხილვის შედეგად თუ $k_y = 0$ -საც გავითვალისწინებთ, იძლევა $H_y = 0$. ახლა განვიხილოთ დაცემული და არეკვლილი სინათლის სხივების ველების სუპერპოზიციის H_x კომპონენტი. (3) სასაზღვრო პირობის მიხედვით იდეალური გამტარის ზედაპირებზე H_x ნულის ტოლი უნდა იყოს, რაც ავტომატურად გვაძლევს:

$$H_x = 2A \sin(k_x x) \sin(\omega t - k_z z)$$

(0.5 ქულა)

ხოლო k_x ისევ იღებს შემდეგ მნიშვნელობებს: $k_x = \pi n/L$, სადაც $n = 1, 2, 3, 4 \dots$ ასეთი არანულოვანი k_x -ებისთვის ($k_x = 0$ შემთხვევას ქვემოთ ცალკე განვიხილავთ), მაქსველის (2) განტოლებების მესამე გამოსახულებიდან ვიღებთ, რომ $E_x = 0$ და გვრჩება ელექტრული ველის მხოლოდ ერთი არანულოვანი E_y კომპონენტი, რომლის მნიშვნელობასაც ადვილად ვიპოვნით (2)-ის პირველი განტოლებიდან:

$$E_y = -2A \frac{\omega \mu_0}{k_z} \sin(k_x x) \sin(\omega t - k_z z)$$

(0.25 ქულა)

ახლა მოსაძებნი დაგვრჩა H_z , რომელსაც ასევე ადვილად ვიპოვნით (2) -ის მეოთხე განტოლებიდან:

$$H_z = -2A \frac{k_x}{k_z} \cos(k_x x) \cos(\omega t - k_z z)$$

(0.25 ქულა)

B.5 ცალკე განსახილველია $k_x = 0$ შემთხვევა. რადგან სასაზღვრო პირობების გამო ამ დროს გამტარი ზედაპირის პარალელური ელექტრული ველები ნულის ტოლია, ანუ $E_y = E_z = 0$ გვრჩება მხოლოდ ელექტრული ველის არანულოვანი E_x კომპონენტი და რადგან აღებული გვაქვს $k_x = k_y = 0$, მივიღებთ მხოლოდ არანულოვან H_y მაგნიტური ველის მდგენელს და (2) -ის მიხედვით შემდეგ არატრივიალურ ამოხსნას:

$$H_y = 2H_{0y} \cos(\omega t - k_z z); \quad E_x = 2 \frac{k_z}{\omega \varepsilon_0} H_{0y} \cos(\omega t - k_z z)$$

(1.0 ქულა)

ანუ მივიღეთ არანულოვანი მოდა, რომლის გაჩენის მინიმალური სიხშირე 0 -ის ტოლია. ესე იგი ბრტყელ ტალღამტარში ზღურბლური სიხშირე ნულის ტოლია, ანუ ნებისმიერი სიხშირის ტალღა გავრცელდება ტალღამტარში.

(0.5 ქულა)

C.1 ახლა დავიწყით მართკუთხა ფორმის ტალღამტარის განხილვა, პირველ

ყოვლისა ვნახოთ რა სახე ექნება TM მოდას, ანუ როგორც წინათ, ჩავთვალოთ, რომ მაგნიტური ველის გრძივი მდგენელი $H_z = 0$ და დავიწყეთ ველის სხვა კომპონენტების გამოთვლა (2) განტოლებების საშუალებით და (3) სასაზღვრო პირობებით. აქ ჩვენ მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ ტალღამტარის შიგნით დაცემული და არეკვლილი ტალღები გვაქვს, რომლებიც ერთნაირი k_z და სხვადასხვანაირ ნიშნიანი k_x და k_y -ით ხასიათდებიან. მთლიანი ველი კი ამ ტალღების სუპერპოზიციით მიიღება. განვიხილოთ E_z კომპონენტი, რომელიც წარმოდგება როგორც დაცემული და არეკვლილი ტალღის სუპერპოზიცია:

$$E_z = A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) + B \cos(\omega t + k_x x - k_y y - k_z z) + C \cos(\omega t + k_x x + k_y y - k_z z) + D \cos(\omega t - k_x x + k_y y - k_z z)$$

(0.5 ქულა)

ხოლო (3) სასაზღვრო პირობა კი გვეუბნება, რომ იდეალური გამტარის ზედაპირებზე E_z ნულის ტოლი უნდა იყოს, რაც ავტომატურად გვაძლევს $B = -A$; $C = A$; $D = -A$ და საბოლოოდ მივიღებთ:

$$E_z = 4A \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(\omega t - k_z z)$$

(0.25 ქულა)

k_x იღებს შემდეგ მნიშვნელობებს: $k_x = \pi n / L_1$, სადაც $n = 1, 2, 3, 4 \dots$, ხოლო k_y კი $k_y = \pi m / L_2$, სადაც $m = 1, 2, 3, 4 \dots$

(0.25 ქულა)

ქვემოთ კი ვაჩვენებთ, რომ TM მოდის შემთხვევაში არც k_x და არც k_y ნულის ტოლი არ შეიძლება გახდნენ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ნულოვან ტრივიალურ ამონახსნს მივიღებთ.

C.2 ახლა თუ გამოვიყენებთ (2) -ს (კერძოდ კი პირველ და მესამე განტოლებებს) იმის გათვალისწინებით, რომ $H_z = 0$, გვექნება:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

მარტივად მივიღებთ ელექტრული ველის სხვა კომპონენტებსაც:

$$E_x = -E_{0z} \frac{k_x k_z}{k_x^2 + k_y^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(\omega t - k_z z);$$

$$E_y = -E_{0z} \frac{k_y k_z}{k_x^2 + k_y^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(\omega t - k_z z)$$

(0.25 ქულა)

ხოლო მაგნიტური ველის მისაღებად ყველაზე მარტივია (2)-ის პირველი განტოლების გამოყენება, რაც გვაძლევს:

$$H_x = E_{0z} \frac{\omega \epsilon_0 k_y}{k_x^2 + k_y^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(\omega t - k_z z);$$

$$H_y = -E_{0z} \frac{\omega \epsilon_0 k_x}{k_x^2 + k_y^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(\omega t - k_z z);$$

(0.25 ქულა)

თუ ახლა შევხედავთ ველების გამოსახულებებს, მაშინ მარტივია დავინახოთ, რომ თუ ერთ-ერთი k_x ან k_y ნულია, მაშინ როცა მეორე ნულისგან განსხვავდება,

ყველა ველი ნულდება და ტრივიალური ამოხსნა გვაქვს, ხოლო თუ ორივე $k_x = k_y = 0$, ველების ნულთან ტოლობა ასე ცხადად არა ჩანს, მაგრამ თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ $k_x = k_y = 0$ პირობებში H_x -ც და H_y -იც ორივე ნულებია სასაზღვრო პირობების გამო, ხოლო H_z ისედაც ნულის ტოლი გვაქვს აღებული, გამოდის, რომ მაგნიტური ველი ნულია, რაც თავის მხრივ იწვევს (2) განტოლებების მიხედვით ელექტრული ველის განულებასაც, ესე იგი გვაქვს ტრივიალური ამოხსნა. ამიტომაც TM მოდის შემთხვევაში k_x და k_y -ის შესაძლო მნიშვნელობებში ნული არ გვაქვს და ამიტომ დისპერსია მოიცემა ფორმულით:

$$\omega = \sqrt{k_z^2 + \left(\frac{\pi n}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{L_2}\right)^2}, \quad n = 1, 2, 3, 4 \dots, \quad m = 1, 2, 3, 4 \dots$$

ესე იგი მინიმალური სიხშირე, რომელიც TM მოდის გასაჩენადაა საჭირო არის

$$\omega_{min} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L_2}\right)^2}$$

(0.5 ქულა)

C.3 ახლა გადავიდეთ TE მოდაზე (მართობული ელექტრული ველი), ანუ როგორც წინათ, ჩავთვალოთ, რომ ელექტრული ველის გრძივი მდგენელი $E_z = 0$ და დავიწყოთ ველის სხვა კომპონენტების გამოთვლა (2) განტოლებების საშუალებით და (3) სასაზღვრო პირობებით. განვიხილოთ H_z კომპონენტი, რომელიც წარმოდგება როგორც დაცემული და არეკვლილი ტალღის სუპერპოზიცია:

$$H_z = A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) + B \cos(\omega t + k_x x - k_y y - k_z z) + C \cos(\omega t + k_x x + k_y y - k_z z) + D \cos(\omega t - k_x x + k_y y - k_z z)$$

(0.25 ქულა)

ეს მაგნიტური ველი იდეალური გამტარი ზედაპირების პარალელურია და ამიტომ (3) სასაზღვრო პირობების თანახმად არაა აუცილებელი რომ საზღვარზე ნულდებოდეს, ამიტომ გადავიდეთ პირდაპირ H_x და H_y -ის გამოთვლაზე. გამოვიყენოთ ისევ (2), კერძოდ კი, რადგან გვაქვს $E_z = 0$, განტოლებები ჩაიწერება როგორც:

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

და მივიღებთ:

$$H_x = \frac{k_x k_z}{k_x^2 + k_y^2} [-A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) + B \cos(\omega t + k_x x - k_y y - k_z z) + C \cos(\omega t + k_x x + k_y y - k_z z) - D \cos(\omega t - k_x x + k_y y - k_z z)]$$

$$H_y = \frac{k_y k_z}{k_x^2 + k_y^2} [-A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) - B \cos(\omega t + k_x x - k_y y - k_z z) + C \cos(\omega t + k_x x + k_y y - k_z z) + D \cos(\omega t - k_x x + k_y y - k_z z)]$$

(0.25 ქულა)

ეს კომპონენტები უკვე ნულდებიან საზღვარზე, კერძოდ, H_x უნდა ქრებოდეს $x = 0$ -ზე, რაც იძლევა პირობას $B = A$; $D = C$, ხოლო H_y -ის განულების პირობა $y = 0$

-ზე გვაძლევს პირობებს $C = B; D = A$, საბოლოოდ კი გვექნება: $B = A; C = A; D = A$. ამ პირობების გათვალისწინებით კი მაგნიტური ველების მდგენელები გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} H_z &= 4A \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(\omega t - k_z z); \\ H_x &= -4A \frac{k_x k_z}{k_x^2 + k_y^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(\omega t - k_z z); \\ H_y &= -4A \frac{k_y k_z}{k_x^2 + k_y^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(\omega t - k_z z) \end{aligned}$$

(0.25 ქულა)

ხოლო ელექტრული ველებისთვის გვექნება:

$$\begin{aligned} E_z &= 0; \\ E_x &= 4A \frac{\omega \mu_0 k_y}{k_x^2 + k_y^2} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(\omega t - k_z z); \\ E_y &= -4A \frac{\omega \mu_0 k_x}{k_x^2 + k_y^2} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(\omega t - k_z z) \end{aligned}$$

(0.25 ქულა)

C.4 თუ ახლა შევხედავთ ველების გამოსახულებებს TE მოდის შემთხვევაში, მაშინ მარტივია დავინახოთ, რომ თუ ერთ-ერთი k_x ან k_y ნულია მეორე ნულისგან განსხვავდება, ყველა ველი არ ნულდება. მაგალითად, მაშინ როცა $k_x = 0$ და $k_y \neq 0$, არანულოვანი ველების კომპონენტებისთვის გვაქვს შემდეგი ჩანაწერი:

$$\begin{aligned} E_x &= 4A \frac{\omega \mu_0}{k_y} \sin(k_y y) \sin(\omega t - k_z z); \quad H_z = 4A \cos(k_y y) \cos(\omega t - k_z z); \\ H_y &= -4A \frac{k_z}{k_y} \sin(k_y y) \sin(\omega t - k_z z). \end{aligned}$$

(0.25 ქულა)

ამასთან ერთად, თუ ერთდროულად ორივე ტალღური ვექტორის მდგენელი ნულდება $k_x = k_y = 0$, როგორც ეს ზემოთ TM მოდის განხილვისასაც გავარკვეით, გვაქვს მხოლოდ ტრივიალური ამოხსნა. ამიტომაც TE მოდის შემთხვევაში დისპერსია მოიცემა ფორმულით:

$$\omega = \sqrt{k_z^2 + \left(\frac{\pi n}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{L_2}\right)^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4 \dots, \quad m = 0, 1, 2, 3, 4 \dots$$

სადაც n და m ერთდროულად ნულის ტოლი არ ხდება.

(0.5 ქულა)

ესე იგი, თუ დავუშვებთ, რომ $L_1 > L_2$ მინიმალური სიხშირე, რომელიც TE მოდის გასაჩენადაა საჭირო არის

$$\omega_{cr} = \pi/L_1$$

იგივე იქნება ყველანაირი სინათლის მინიმალური სიხშირეც, რადგან TM მოდის შემთხვევაში მინიმალური სიხშირე ამაზე მეტია.

(0.25 ქულა)

ამოცანა #2 -ის ამოხსნა და შეფასების სქემა: სითხე-გაზის ფაზური
გადასვლები

A.1 პირველ ყოვლისა აღვნიშნოთ, რომ რეალური გაზების შემთხვევაში მოლეკულებს სამოძრაოდ ნაკლები სივრცე აქვთ, ვიდრე ჭურჭლის V მოცულობაა, ვინაიდან ისინი ვერ აღწევენ მეზობელი მოლეკულების შიგნით, უფრო კონკრეტულად კი წყვილური დაჯახებისას მოლეკულისთვის აკრძალულია სივრცე, როდესაც მოლეკულებს ცენტრებს შორის მანძილი r_1 -ზე ნაკლებია, ანუ ყოველი მოლეკულათა წყვილისთვის უნდა გამოვრიცხოთ $4\pi r_1^3/3$ მოცულობა და რადგან წყვილთა რიცხვი ერთ მოლ ნივთიერებაში $N_A/2$ -ია, მივიღებთ b კოეფიციენტის მნიშვნელობას

$$b = 2\pi r_1^3 N_A/3$$

(1.0 ქულა)

A.2 რაც შეეხება a კოეფიციენტს, მას მივიღებთ შემდეგი მსჯელობიდან: მოლეკულის მიზიდვის ველში აღმოჩნდება ის მოლეკულები, რომლებიც მისი ცენტრიდან დაშორებულია არაუმეტეს r_0 მანძილისა, თან რადგან გვაქვს პირობა $r_0 \gg r_1$, ვთვლით რომ ყველა მოლეკულა, რომელიც r_0 რადიუსის სფეროს შიგნითაა $-\varepsilon_0$ ენერგიით ხასიათდება, და ასეთი მოლეკულების რიცხვი არის $4\pi r_0^3 N_A/(3V)$. ესე იგი სრული პოტენციური ენერგია იქნება ეს რიცხვი გამრავლებული $-\varepsilon_0$ -ზე, კიდევ გამრავლებული ავოგადროს რიცხვზე და გაყოფილი ორზე, იმისთვის რომ თვლაში თითოეული მოლეკულა ორჯერ არ გავითვალისწინოთ. ანუ გვექნება სრული ენერგიისთვის $E = E_k - 2\pi\varepsilon_0 r_0^3 N_A^2/(3V)$, სადაც E_k კინეტიკური ენერგიაა და რადგან სითხოს გადაცემის გარეშე გვაქვს რომ $dE = -PdV$, სადაც P გარე წნევაა, მივიღებთ, რომ $dE_k = -[P + 2\pi\varepsilon_0 r_0^3 N_A^2/(3V^2)]dV$, ანუ ვიღებთ რომ გაზში არსებულ წნევას აქვს სახე: $P + a/V^2$ და a კოეფიციენტი განისაზღვრება როგორც:

$$a = 2\pi\varepsilon_0 r_0^3 N_A^2/3$$

(1.0 ქულა)

B.1 ახლა გადავიდეთ კრიტიკული იზოთერმების განსაზღვრაზე. როგორც ნახატზე გამოსახული იზოთერმებიდან ჩანს, ყოველი კონკრეტული ტემპერატურის იზოთერმას მოცემული წნევისთვის აქვს მოცულობის ერთი ან სამი ფესვი. კრიტიკული იზოთერმა არის ის, რომელშიც სამი ფესვი ერთად გადაიქცევა. ანუ ამ იზოთერმისთვის გვექნება შემდეგი ჩანაწერი მოცულობის კუბური პოლინომისთვის:

$$(V - V_k)^3 = 0$$

(2.0 ქულა)

სადაც V_k არის გადაგვარებული ფესვი, ანუ კრიტიკული მოცულობა. ეს უნდა შევადაროთ ვან დერ ვაალსის განტოლების ჩანაწერს კუბური პოლინომის სახით კრიტიკულ წერტილში, ანუ როცა $V = V_k, P = P_k, T = T_k$:

$$PV^3 - V^2(Pb + RT) + aV - ab = 0$$

და მივიღებთ სამუცნობიან სამ განტოლებას:

$$3V_k = b + RT_k/P_k; \quad 3V_k^2 = a/P_k; \quad V_k^3 = ab/P_k$$

(0.5 ქულა)

საიდანაც გვაქვს კრიტიკული პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობები:

$$V_k = 3b; \quad P_k = \frac{a}{27b^2}; \quad T_k = \frac{8a}{27bR}$$

(0.5 ქულა)

B.2 გადავიდეთ ახლა ფაზების წონასწორობის პირობებზე. ისევ ვიხილავთ ერთ მოლ ნივთიერებას. სითხე-გაზის სრული ენტროპია ჩაიწერება როგორც

$$S = \nu_1 s_1 + \nu_2 s_2$$

სადაც s_1 და s_2 გაზის და სითხის ერთი მოლის კუთრი ენტროპიებია, ხოლო ν_1 და ν_2 გაზის და სითხის მოლების რაოდენობები. თერმოდინამიკურ წონასწორობაში ეს ენტროპია უნდა იყოს მაქსიმალური, ანუ მისი დიფერენციალი ნულის ტოლი უნდა იყოს:

$$d\nu_1 s_1 + d\nu_2 s_2 + \nu_1 ds_1 + \nu_2 ds_2 = 0$$

შექცევითი პროცესის დროს (ანუ როცა ყოველ მდგომარეობაში გვაქვს თერმოდინამიკური წონასწორობა) თერმოდინამიკის პირველი კანონიდან გვაქვს: $ds_1 = p_1 d\nu_1/T_1 + de_1/T_1$ და $ds_2 = p_2 d\nu_2/T_2 + de_2/T_2$, სადაც ν_1 , p_1 , T_1 , s_1 არის ერთი მოლი გაზის მოცულობა, წნევა, ტემპერატურა და ენტროპია, ხოლო ν_2 , p_2 , T_2 , s_2 არის ერთი მოლი სითხის იგივე პარამეტრები. გავითვალისწინოთ ახლა ნივთიერების რაოდენობის, სრული მოცულობისა და სრული ენერგიის შენახვის კანონები, რომლებიც ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\nu_1 + \nu_2 = 1; \quad V = \nu_1 \nu_1 + \nu_2 \nu_2; \quad E = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2;$$

და ამათი გადიფერენციალება გვაძლევს შემდეგ თანაფარდობებს:

$$d\nu_1 + d\nu_2 = 0; \quad d\nu_1 \nu_1 + d\nu_2 \nu_2 + \nu_1 d\nu_1 + \nu_2 d\nu_2 = 0; \quad d\nu_1 e_1 + d\nu_2 e_2 + \nu_1 de_1 + \nu_2 de_2 = 0,$$

(0.5 ქულა)

ასე რომ გვაქვს სამი განტოლება საიდანაც გამოვსახავთ $d\nu_2$, $d\nu_2$, de_2 დიფერენციალებს $d\nu_1$, $d\nu_1$, de_1 დიფერენციალების საშუალებით და ყველაფერს ჩავსვათ ენტროპიის დიფერენციალში და მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$\nu_1 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) de_1 + \nu_1 (p_1 - p_2) d\nu_1 + \left(\frac{e_2 - e_1}{T_2} + \frac{\nu_2 - \nu_1}{T_2} p_2 + s_1 - s_2 \right) d\nu_1 = 0$$

(1.0 ქულა)

რაც უნდა დაკმაყოფილდეს $d\nu_1$, $d\nu_1$, de_1 დიფერენციალების ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის. ეს მოთხოვნა კი გვაძლევს სითხე-გაზის წონასწორობის სამ პირობას:

$$T_1 = T_2 \equiv T; \quad p_1 = p_2 \equiv P; \quad e_1 + p\nu_1 - s_1 T = e_2 + p\nu_2 - s_2 T \equiv \mu$$

(0.5 ქულა)

B.3 რადგან სითხის და გაზის სრულად დახასიათება თავთავიანთი ტემპერატურებით და წნევებით შეგვიძლია, მაგრამ ვხედავთ რომ ეს წნევები და ტემპერატურები ერთნაირი აქვთ, და კიდევ მესამე პირობაცაა დადებული, გამოდის რომ სითხე-გაზის დახასიათება ერთადერთი პარამეტრით, მაგალითად T ტემპერატურით შეიძლება, ხოლო წნევა კი ამ ტემპერატურის საშუალებით გამოითვლება. რადგან ჩვენ იზოთერმულ პროცესებს ვიხილავთ, ეს ნიშნავს, რომ I წერტილში (სადაც იწყება სითხის გაზში გადასვლა) და II წერტილში (სადაც ეს გადასვლა მთავრდება), წნევა ერთნაირია. ამ წერტილებში ერთნაირია აგრეთვე სითხის და გაზის მახასიათებელი μ სიდიდე. თუ განვიხილავთ ახლა შემდეგ კომბინაციას

$$(e_1 + Pv_1 - s_1T)v_1 + (e_2 + Pv_2 - s_2T)v_2$$

ეს იქნება μ -ს ტოლი, რადგან გვაქვს ერთი მოლი ნივთიერება $v_1 + v_2 = 1$. ამიტომ გვექნება $E + PV - ST = \mu$ და რადგან μ ერთნაირია I და II წერტილებში, $E + PV - ST$ სიდიდეც ერთიდაიგივე იქნება. ავიღოთ ამ სიდიდის დიფერენციალი და კვლავ გამოვიყენოთ თერმოდინამიკის პირველი კანონი შექცევადი პროცესის დროს ანუ $dE = -PdV + TdS$ და იმის გათვალისწინებით, რომ გვაქვს იზოთერმული პროცესი $dT = 0$, გვექნება:

$$-PdV + d(PV) = d\mu$$

(1.0 ქულა)

ამის გაინტეგრება კი I დან II წერტილებამდე იძლევა შედეგს:

$$\int_I^{II} PdV = P(V_{II} - V_I)$$

თუ გამოვიყენებთ ახლა ვან დერ ვალსის განტოლებას, მივიღებთ ორ განტოლებას ორი V_I და V_{II} უცნობით,

$$RT \ln \left(\frac{V_{II} - b}{V_I - b} \right) + a \left(\frac{1}{V_{II}} - \frac{1}{V_I} \right) = \left(\frac{RT}{V_I - b} - \frac{a}{V_I^2} \right) (V_{II} - V_I);$$

$$RT \ln \left(\frac{V_{II} - b}{V_I - b} \right) + a \left(\frac{1}{V_{II}} - \frac{1}{V_I} \right) = \left(\frac{RT}{V_{II} - b} - \frac{a}{V_{II}^2} \right) (V_{II} - V_I)$$

(0.5 ქულა)

B.4 ახლა შევისწავლოთ ნაჯერი ორთქლის წნევის ტემპერატურაზე დამოკიდებულება, ესე იგი უკვე აღარ შემოვიფარგლებით იზოთერმული პროცესით. მაგრამ ამ ფორმულის

$$e_1 + pv_1 - s_1T = e_2 + pv_2 - s_2T$$

გამოსაყვანად ტემპერატურის მუდმივობა არსად გამოგვიყენებია და ამიტომ თავისუფლად შეგვიძლია განვიხილოთ. ავიღოთ ამ ტოლობის დიფერენციალი და თუ შექცევად პროცესებს განვიხილავთ და ამიტომ თერმოდინამიკის პირველ კანონს სითხისთვის და გაზისთვის ცალკ-ცალკე ჩავწერთ $de_1 = -Pdv_1 + Tds_1$ და

$de_2 = -Pdv_2 + Tds_2$, მივიღებთ:

$$(v_1 - v_2)dP = (s_1 - s_2)dT$$

(0.5 ქულა)

სადაც $s_1 - s_2$ არის სითხის და გაზის ერთი მოლის ენტროპიების სხვაობა. ეს სიდიდე რომ ვიპოვოთ, განვიხილოთ ერთი მოლი სითხის ნაჯერ ორთქლად გარდაქმნა სითხე გაზის წონასწორობის დროს. რადგან ამ პროცესში ტემპერატურა არ იცვლება, გვქვნება, რომ $s_1 - s_2 = Q_{12}/T$,

(0.5 ქულა)

სადაც Q_{12} არის ერთი მოლი სითხის აორთქლებისთვის საჭირო სითბოს რაოდენობა, მაგრამ ეს პირდაპირ აორთქლების კუთრი მოლური სითბო λ -ს განმარტებაა, ანუ მივიღებთ, რომ

$$\frac{dT}{dP} = \frac{T(v_1 - v_2)}{\lambda}$$

(0.5 ქულა)

ამოცანა #3 -ის ამოხსნა და შეფასების სქემა: შრედინგერის განტოლება

A.1 $\psi_1(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$ ტალღური ფუნქციის მეორე წარმოებულია $\psi_1''(x) = -k^2 A \sin(kx) - k^2 B \cos(kx) = -k^2 \psi(x)$. შრედინგერის განტოლებას $(0, a)$ შუალედში აქვს შემდეგი სახე:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) - E\psi(x) = 0$$

(0.1 ქულა)

მოცემული ტალღური ფუნქციის ჩასმით მივიღებთ

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

(0.1 ქულა)

A.2 ტალღური ფუნქციის უწყვეტობისათვის საჭიროა რომ $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$ და $\psi_1(a) = \psi_2(a) = 0$. ამ პირობით ვიღებთ რომ $B = 0$ და შესაბამისად $A \sin(ka) = 0$. რადგან A არ შეიძლება რომ ნულის ტოლი იყოს, ამიტომ $ka = \pi n$, **(0.2 ქულა)** სადაც n ნებისმიერი მთელი რიცხვია. წინა პუნქტში მიღებული k -ს გამოსახულების გამოყენებით მიიღება:

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2}$$

ანუ:

$$E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

(0.1 ქულა)

A.3 წინა პუნქტებში მიღებული შედეგების გათვალისწინებით ალბათობის სიმკვრივის სახეა:

$$\rho(x) = \psi_1^2(x) = A^2 \sin^2\left(\frac{\pi nx}{a}\right)$$

(0.1 ქულა)

ვინაიდან $(0, a)$ შუალედის გარეთ ნაწილაკის ყოფნის ალბათობა ნულია, შუალედის შიგნით ყოფნის ალბათობა 1-ის ტოლი უნდა იყოს. შესაბამისად:

$$P = \int_0^a \rho(x) dx = 1$$

(0.1 ქულა)

ინტეგრალის დათვლის შედეგად მივიღებთ:

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

(0.2 ქულა)

A.4 უმცირესი არანულოვანი ენერგია გვაქვს, როცა $n = 1$. შესაბამისად ალბათობის სიმკვრივე იქნება:

$$\rho(x) = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

შესაბამისად ალბათობა იქნება:

$$P = \int_0^{\frac{a}{4}} \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \approx 0.09 = 9\%$$

(0.1 ქულა)

B.1 მოცემული პოტენციური ენერგიისათვის შრედინგერის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) + \left(\frac{kx^2}{2} - E\right) \psi(x) = 0$$

რადგან ტალღური ფუნქციის სახეა $\psi(x) = e^{-\alpha x^2}$, მისი მეორე წარმოებული იქნება:

$$\psi''(x) = 2\alpha(2\alpha x^2 - 1)e^{-\alpha x^2}$$

(0.4 ქულა)

შრედინგერის განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ:

$$e^{-\alpha x^2} \left(x^2 \left(4\alpha^2 - \frac{mk}{\hbar^2} \right) + \frac{2mE}{\hbar^2} - 2\alpha \right) = 0$$

(0.1 ქულა)

ვინაიდან ექსპონენტა ნული ვერ იქნება, საჭიროა რომ ფრჩხილებში არსებული გამოსახულება იყოს ნულის ტოლი ნებისმიერი x -სათვის. ამისათვის:

$$\begin{cases} 4\alpha^2 - \frac{mk}{\hbar^2} = 0 \\ \frac{2mE}{\hbar^2} - 2\alpha = 0 \end{cases}$$

(0.4 ქულა)

საიდანაც ვიღებთ რომ:

$$\alpha = \frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}$$

(0.1 ქულა)

და:

$$E = \frac{\alpha \hbar^2}{m} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(0.1 ქულა)

B.2 რადგან ტალღური ფუნქციის სახეა $\psi(x) = f(x)e^{-\alpha x^2}$, მისი მეორე წარმოებული იქნება:

$$\psi''(x) = e^{-\alpha x^2} (f''(x) - 4\alpha x f'(x) + 2\alpha(2\alpha x^2 - 1)f(x))$$

(0.3 ქულა)

შრედინგერის განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ:

$$e^{-\alpha x^2} \left(f''(x) - 4\alpha x f'(x) + \left(x^2 \left(4\alpha^2 - \frac{mk}{\hbar^2} \right) + \frac{2mE}{\hbar^2} - 2\alpha \right) f(x) \right) = 0$$

(0.1 ქულა)

ფრჩხილებში არსებული წევრი უნდა იყოს ნულის ტოლი. ასევე წინა პუნქტში მიღებული α -ს ჩასმით ვიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$f''(x) - 2\frac{\sqrt{mk}}{\hbar} x f'(x) + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{\sqrt{mk}}{\hbar} \right) f(x) = 0$$

რადგან განტოლებას უნდა ქონდეს $f''(x) + Ax f'(x) + Bf(x) = 0$ სახე, ვიღებთ:

$$A = -2\frac{\sqrt{mk}}{\hbar}$$

(0.2 ქულა)

და

$$B = \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{\sqrt{mk}}{\hbar}$$

(0.2 ქულა)

B.3 ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \dots + a_n x^n + \dots$$

შესაბამისად პირველი და მეორე წარმოებული ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + a_n n x^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n$$

(0.2 ქულა)

და

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \dots + a_n n(n-1)x^{n-2} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}$$

(0.2 ქულა)

ამ გამოსახულებების $f''(x) + Ax f'(x) + Bf(x) = 0$ განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n A n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n B x^n = 0$$

პირველ ჯამში გავაკეთოთ ჩანაცვლება $n \rightarrow n' + 2$, რაც მოგვცემს:

$$\sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'+2} (n' + 2)(n' + 1)x^{n'}$$

ცხადია შეგვიძლია n' -ს ისევ n დავარქვათ, რაც მოგვცემს შემდეგ გამოსახულებას:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n A n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n B x^n = 0$$

(0.3 ქულა)

ჯამების გაერთიანებით გვექნება:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+2} (n+2)(n+1) + a_n A n + a_n B) x^n = 0$$

(0.2 ქულა)

თუ გვინდა რომ გამოსახულება ნებისმიერი x -ისთვის იყოს ნული მაშინ ფრჩხილებში არსებული გამოსახულება უნდა უდრიდეს ნულს:

$$a_{n+2} (n+2)(n+1) + a_n A n + a_n B = 0$$

(0.3 ქულა)

საიდანაც ვიღებთ:

$$a_{n+2} = -\frac{An + B}{(n+2)(n+1)} a_n$$

რადგან საძიებელი სახე იყო $a_{n+2} = C_n a_n$, ვიღებთ რომ:

$$C_n = -\frac{An + B}{(n+2)(n+1)}$$

(0.2 ქულა)

B.4 რადგან მწკრივი სადმე უნდა გაწყდეს საჭიროა რომ რომელიმე n -სათვის C_n იყოს ნული:

$$-\frac{An+B}{(n+2)(n+1)}=0$$

რაც ნიშნავს რომ $An+B=0$. A -ს და B -ს გამოსახულებების ჩასმით მივიღებთ:

$$E=\hbar\sqrt{\frac{k}{m}\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

(0.2 ქულა)

B.5 ყველაზე მცირე არამინიმალური ენერგია არის როცა $n=1$, რაც ნიშნავს რომ $C_1=0$ მაგრამ არცერთი სხვა $C_{n\neq 1}\neq 0$. ეს ნიშნავს რომ პირველის გარდა ყველა კენტი ინდექსიანი a_n იქნება ნული. ლუწ ინდექსიანი a_n -ების ნულობისათვის საჭიროა, რომ $a_0=0$. აქედან გამომდინარე ვიღებთ რომ $f(x)=a_1x$. შესაბამისი ტალღური ფუნქცია იქნება $\psi_1(x)=a_1xe^{-\alpha x^2}$, ხოლო ალბათობის სიმკვრივე $\rho(x)=\psi_1^2(x)=a_1^2x^2e^{-2\alpha x^2}$. ნაწილაკის ნებისმიერ ადგილას ყოფნის ალბათობა 1-ის ტოლი უნდა იყოს, ანუ:

$$P=\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)dx=1$$

(0.1 ქულა)

ინტეგრალის ალების შედეგად მივიღებთ:

$$a_1=2\sqrt[4]{\frac{2\alpha^3}{\pi}}$$

(0.2 ქულა)

2.1 პუნქტიდან α -ს ჩასმით საბოლოო ტალღურ ფუნქციას მივიღებთ:

$$\psi_1(x)=\sqrt[4]{\frac{4\sqrt{m^3k^3}}{\pi\hbar^3}}xe^{-\frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}x^2}$$

(0.2 ქულა)

C.1 ნებისმიერ $x\neq 0$ კოორდინატში შრედინგერის განტოლება იქნება:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x)-E\psi(x)=0$$

შესაბამისად $\psi_-(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$ და $\psi_+(x)=Ce^{ikx}$ ფუნქციების ჩასმით მივიღებთ რომ:

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

(0.1 ქულა)

C.2 $x = 0$ კოორდინატში შრედინგერის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(0) + \left(\frac{g}{d} - E\right)\psi(0) = 0$$

(0.3 ქულა)

მეორე წარმოებული შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\psi''(0) = \frac{\psi'_+\left(\frac{d}{2}\right) - \psi'_-\left(\frac{d}{2}\right)}{d}$$

(0.5 ქულა)

შრედინგერის განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ:

$$\psi'_+\left(\frac{d}{2}\right) - \psi'_-\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{2m}{\hbar^2}(g - Ed)\psi(0)$$

(0.2 ქულა)

როცა $d \rightarrow 0$ გვექნება:

$$\psi'_+(0) - \psi'_-(0) = \frac{2mg}{\hbar^2}\psi(0)$$

(0.3 ქულა)

ანუ:

$$D = \frac{2mg}{\hbar^2}$$

(0.2 ქულა)

C.3 რადგან ტალღური ფუნქცია უწყვეტი უნდა იყოს, ამიტომ $\psi_-(0) = \psi_+(0)$. წინა პუნქტში მიღებული პირობის გამოსაყენებლად დაგვჭირდება ტალღური ფუნქციების წარმოებულები:

$$\psi'_-(x) = ikAe^{ikx} - ikBe^{-ikx}$$

$$\psi'_+(x) = ikCe^{ikx}$$

ანუ გვაქვს განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} \psi_-(0) = \psi_+(0) \\ \psi'_+(0) - \psi'_-(0) = \frac{2mg}{\hbar^2}\psi(0) \end{cases}$$

ჩასმის შემდეგ მივიღებთ:

$$\begin{cases} A + B = C \\ ikC - ikA + ikB = \frac{2mg}{\hbar^2} C \end{cases}$$

(0.3 ქულა)

B და C -სთვის ამოხსნით და k -ს ჩასმით მივიღებთ:

$$\begin{cases} B = \frac{-A g m (g m + i \hbar \sqrt{2 m E})}{2 \hbar^2 m E + g^2 m^2} \\ C = \frac{A \hbar \sqrt{2 m E} (\hbar \sqrt{2 m E} - i g m)}{2 \hbar^2 m E + g^2 m^2} \end{cases}$$

(0.3 ქულა)

C.4 ნებისმიერი $\psi(x) = D e^{ik'x}$ ტალღური ფუნქციისათვის ალბათობის დენი გამოდის:

$$J = \frac{i\hbar}{2m} (\psi(x)\psi^{*'}(x) - \psi'(x)\psi^*(x)) = \frac{k'\hbar}{m} D D^*$$

შესაბამისად სამივე ტალღური ფუნქციისათვის გვექნება:

$$J_A = \frac{k\hbar}{m} |A|^2$$

(0.1 ქულა)

$$J_B = \frac{-k\hbar}{m} |B|^2$$

(0.1 ქულა)

$$J_C = \frac{k\hbar}{m} |C|^2$$

(0.1 ქულა)

შესაბამისად

$$P_1 = \left| \frac{J_B}{J_A} \right| = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{g^2 m}{2 \hbar^2 E + g^2 m}$$

(0.1 ქულა)

$$P_2 = \left| \frac{J_C}{J_A} \right| = \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \frac{2 \hbar^2 E}{2 \hbar^2 E + g^2 m}$$

(0.1 ქულა)

C.5 ტალღურ ფუნქციებს სათავის მარცხენა და მარჯვენა მხარეს ვეძებთ შესაბამისად $\psi_-(x) = A e^{kx}$ და $\psi_+(x) = B e^{-kx}$ სახით. შრედინგერის განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ:

$$k = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$$

(0.2 ქულა)

ამ ორი ფუნქციის გადაბმის განტოლებას იგივე სახე ექნება როგორც დადებითი ენერგიების შემთხვევაში:

$$\begin{cases} \psi_-(0) = \psi_+(0) \\ \psi'_+(0) - \psi'_-(0) = \frac{2mg}{\hbar^2} \psi(0) \end{cases}$$

(0.4 ქულა)

საიდანაც მივიღებთ სისტემას:

$$\begin{cases} A = B \\ -Bk - Ak = \frac{2mg}{\hbar^2} A \end{cases}$$

(0.4 ქულა)

ამ სისტემას ამონახსნი აქვს როცა:

$$k = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}} = \frac{-mg}{\hbar^2}$$

(0.2 ქულა)

აქედან ცხადად ჩანს რომ ამონახსნის არსებობისათვის საჭიროა $g < 0$. ენერგიის გამოსახულება:

$$E = -\frac{mg^2}{2\hbar^2}$$

(0.3 ქულა)

C.6 ტალღური ფუნქციები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$\psi_-(x) = Ae^{\frac{-mg}{\hbar^2}x}$$

$$\psi_+(x) = Ae^{\frac{mg}{\hbar^2}x}$$

მთლიან სივრცეში ნაწილაკის ყოფნის ალბათობაა 1, ამიტომ:

$$\int_{-\infty}^0 \psi_-^2(x) dx + \int_0^{\infty} \psi_+^2(x) dx = -\frac{A^2 \hbar^2}{mg} = 1$$

(0.5 ქულა)

საიდანაც ვიღებთ რომ:

$$A = \sqrt{-\frac{mg}{\hbar^2}}$$

(0.1 ქულა)

ანუ საბოლოოდ გვექნება:

$$\psi_{-}(x) = \sqrt{-\frac{mg}{\hbar^2}} e^{\frac{-mg}{\hbar^2}x}$$

(0.1 ქულა)

$$\psi_{+}(x) = \sqrt{-\frac{mg}{\hbar^2}} e^{\frac{mg}{\hbar^2}x}$$

(0.1 ქულა)