

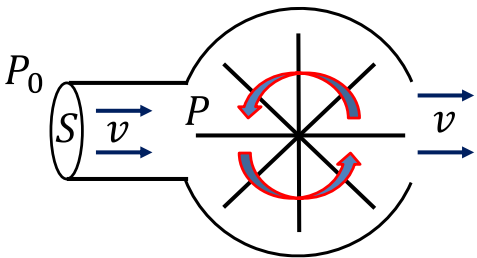
ამოცანა 1

ქიმიური ამწოვითი სისტემის აეროდინამიკა (15 ქულა)

ამწოვი კარადა ქიმიური ლაბორატორიის ჩვეულებრივი ატრიბუტია და მისი დანიშნულებაა ქიმიური წარმოების ან ექსპერიმენტების მსვლელობისას წარმოქმნილი მავნე-მომწამლავი აირების გაწოვა ღია სივრცეში, ისე რომ არ მოხდეს მათი გაჟონვა ქიმიურ ლაბორატორიაში. ამისთვის აწყობილია ერთი შეხედვით მარტივი სისტემა, რაც მოიცავს, როგორც წესი, შენობის სახურავზე დამონტაჟებულ ძრავას, რომელიც მილების სიტემითაა მიერთებული ამწოვ კარადებთან. ფრთიანი ძრავა ქმნის წნევათა სხვაობას და ჰაერი გაიწოვება კარადიდან ძრავისკენ. მთელი ეს პროცესი აღიწერება ჰიდროდინამიკის ნავიე-სტოქსის განტოლებით, რომლის ამოხსნაც თუნდაც ჩვენი კონკრეტული შემთხვევისთვის რთული კომპიუტერული თვლის ამოცანაა. თუმცა ამ ამოცანის ფარგლებში ჩვენ ვეცდებით გამარტივებული განხილვის მეშვეობით პროცესის ანალიზურად აღწერას ისე, რომ შესაძლებელი გახდეს ამწოვი სისტემის ძირითადი პარამეტრების გამოთვლა, რომელიც უზრუნველყოფს ამწოვი კარადის უსაფრთხო ფუნქციონირებას. გამარტივებები ძირითადად შეეხება უკუმშვადი აირის სტაციონარული დინების შემთხვევის განხილვას, თუმცა გათვალისწინებული იქნება ხახუნის და სიმაღლის ცვალებადობასთან დაკავშირებული ეფექტები.

ნაწილი A: ამწოვი ძრავის ფუნქციონირება (1.5 ქულა)

დავიწყებთ ელექტროძრავის განხილვით, რომელიც, რა თქმა უნდა, ქსელიდან მოხმარებული სიმძლავრით ხასიათდება. აღნიშვნა ამის შესახებ ყველა ძრავზეა ამოტვიფრული და თუ დავადგენთ რა სიმძლავრის ძრავა გვჭირდება, მერე მაღაზიაში შესაბამისი ძრავის არჩევაც არ იქნება პრობლემა. ძრავა დაკავშირებულია ფრთიან მექანიზმთან, რომელიც უშუალოდ უზრუნველყოფს ერთი მხრიდან ჰაერის შეწოვას (ამ მხარეს უნდა მივაერთოთ ამწოვი კარადა) ხოლო მეორე მხრიდან გამოდევნის ამ შეწოვილ ჰაერს.



ნახატი 1: ძრავის და ფრთიანი მექანიზმის ფუნქციონირების სქემატური ნახაზი.

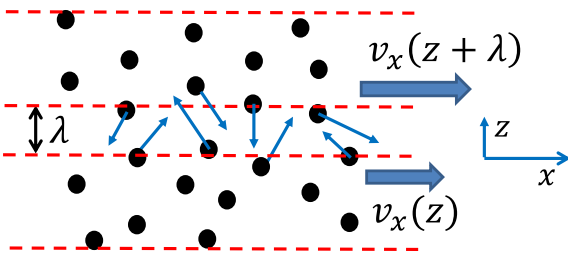
ძრავის ფრთიან მექანიზმში ჰაერი ღია სივრციდან გარკვეული v სიჩქარით შეიწოვება, რომელიც ადვილად შეიძლება გაიზომოს. ასევე ცნობილია შემწოვი ღიობის განივკვეთის ფართობი S (იხილეთ ნახატი 1). ვიცით აგრეთვე ატმოსფერული წნევის მნიშვნელობა P_0 . ჩვენი მიზანია დავადგინოთ ურთიერთკავშირი ძრავისა და ფრთიანი მექანიზმის

სხვადასხვა გაზომვად პარამეტრებსა და გამოთვლებისთვის საჭირო სიდიდეებს შორის. ამ ნაწილის კითხვებში ყველგან უგულებელყავით ჰაერის სიბლანტით გამოწვეული ხახუნის ეფექტები და ყველგან ამ ამოცანაში აირი უკუმშველად ჩათვალეთ.

A.1	ვიცით რა შეწოვის სიჩქარე v , შემწოვი ღიობის განივკვეთის ფართობი S და ჰაერის სიმკვრივე ρ , გამოიანგარიშეთ ერთეულ დროში შეწოვილი აირის მოცულობა (შეწოვის მოცულობითი სიჩქარე) Q და ძრავის ფრთიანი მექანიზმის მიერ შექმნილი წნევათა სხვაობა $\Delta P = P_0 - P$.	1.0 pt.
A.2	ჩათვალეთ ძრავის სასარგებლო W სიმძლავრედ მექანიზმის მიერ ჰაერის შეწოვაზე დახარჯული სიმძლავრე. როგორაა დაკავშირებული W ფრთიანი მექანიზმის მიერ შექმნილ $\Delta P = P_0 - P$ წნევათა სხვაობასთან და შეწოვის მოცულობითი სიჩქარესთან Q . ჰაერის სიმკვრივე ρ და შემწოვი ღიობის S ზედაპირის ფართობი მოცემულად ჩათვალეთ.	0.5 pt.

ნაწილი B: სიბლანტე და ხახუნის ეფექტები აირის დინებისას (5.5 ქულა)

აირის ორ ფენას შორის გამოწვეული ხახუნი განპირობებულია ამ ფენებს შორის არსებული სასაზღვრო ფენით, რომლის სისქეც აირის მოლეკულების საშუალო თავისუფალი განარბენის λ რიგისაა. ამ შემთხვევაში მეზობელი აირის ფენიდან მოლეკულები დაჯახების გარეშე გადმოდიან და გადმოაქვთ თითოეულს $mv_x(z)$ იმპულსი ქვემოთ ან $mv_x(z + \lambda)$ იმპულსი ზემოდან (იხილეთ ნახატი 2). ხახუნის მექანიზმიც მოლეკულათა ამ ქაოსური გადაადგილებითაა გამოწვეული. დავუშვათ, რომ



ნახატი 2: სიბლანტით გამოწვეული ხახუნის მექანიზმის სქემატური სურათი.

მოლეკულების n კონცენტრაცია ყველგან ერთნაირია და სიჩქარის v_z მდგენელი მაქსველის განაწილებას ემორჩილება სასაზღვრო λ სისქის ფენაში.

მაქსველის განაწილება მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$f(v_z) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_z^2}{2k_B T}}$$

იმის დასადგენად თუ რამდენი მოლეკულის z ღერძზე მოძრაობის სიჩქარეა v_z -დან $v_z + dv_z$ -

მდე შუალედში მოცულობის ერთეულში, შეგვიძლია გამოვიყენოთ შემდეგი ფორმულა:

$$dN = n_0 f(v_z) dv_z$$

სადაც n_0 მოლეკულების კონცენტრაციაა აირში.

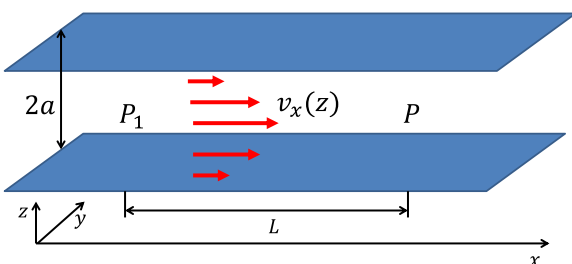
ამ მსჯელობიდან გამომდინარეობს ფენებს შორის ხახუნის ძალის ფორმულა (ძალა, რომლითაც ზედა ფენა მოქმედებს ქვედაზე):

$$F_x = \eta S \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

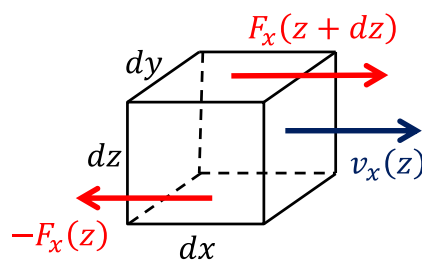
სადაც η სიბლანტის კოეფიციენტი. ზედა მსჯელობიდან გამომდინარე:

B.1	გამოითვალეთ სიბლანტის კოეფიციენტი η -ს დამოკიდებულება T ტემპერატურაზე, საშუალო თავისუფალ განარბენზე λ , აირის ρ სიმკვრივესა და მოლეკულის m მასაზე.	1.5 pt.
------------	--	----------------

გადავიდეთ აირის დინების ყველაზე მარტივი შემთხვევის - ორ უსასრულო სიბრტყეს შორის (იხილეთ ნახატი 3) დინების განხილვაზე, ანუ თქვენი მიზანია სტაციონარული დინების დროს აირის სიჩქარეების განაწილების პოვნა z ღერძის მიმართ. წნევების მნიშვნელობები ორ L მანძილით დაშორებულ წერტილს შორის აღნიშნულია P და P_1 -ით, სიბრტყეებს შორის მანძილია $2a$.



ნახატი 3: აირის დინება ორ უსასრულო სიბრტყეს შორის.



ნახატი 4: აირის დინების მცირე ელემენტზე მოქმედი ხახუნის ძალები.

B.2 გამოითვალეთ $v_x(z)$ როგორც წნევათა სხვაობის, სიბლანტის, სიბრტყეებს შორის დაშორებასა და z კოორდინატის ფუნქცია. როგორ იცვლება აირის სიჩქარე x ღერძის გასწვრივ? **1.5 pt.**

მითითება: გამოიყენეთ ძალთა ბალანსის განტოლება მოცულობის მცირე ელემენტისთვის (ნახატი 4). ჩათვალეთ, რომ სიბრტყესთან მდებარე აირის ფენის სიჩქარე ნულის ტოლია.

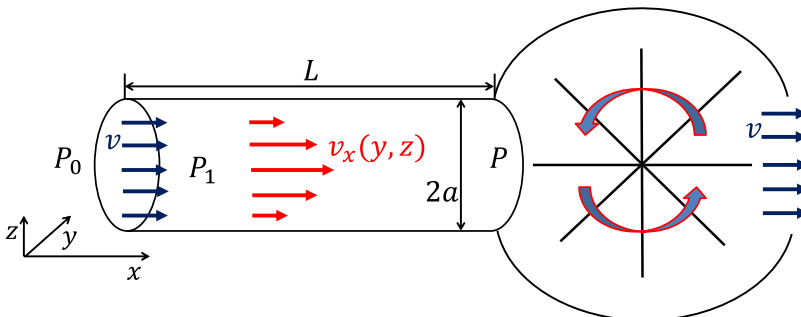
ახლა კი გადავიდეთ უსასრულო წრიულ მილში უკუმშვადი აირის სტაციონარული დინების ამოცანაზე:

B.3 გამოითვალეთ აირის $v_x(y, z)$ სიჩქარეების განაწილება მილში როგორც x ღერძის გასწვრივ განლაგებულ ორ წერტილს შორის წნევათა სხვაობის, ამ წერტილებს შორის L მანძილის, აირის სიბლანტის, მილის a რადიუსისა და y და z კოორდინატების ფუნქცია. **2.0 pt.**

გამოვითვალეთ ახლა აირის გაწოვის მოცულობითი სიჩქარე Q (ერთეულ დროში რა მოცულობა გადის მილის განივკვეთში)

B.4 გამოითვალეთ Q როგორც x ღერძის გასწვრივ განლაგებულ ორ წერტილს შორის წნევათა სხვაობის, ამ წერტილებს შორის L მანძილის, აირის სიბლანტის და მილის a რადიუსის ფუნქცია. **0.5 pt.**

ნაწილი C: ღია სივრციდან აირის მილში შეწოვა (4.0 ქულა)



ნახატი 5: მილში ღია სივრციდან ჰაერის შეწოვის სქემატური სურათი.

ამოცანის ამ ნაწილში განვიხილავთ მთავარ საკითხს, კერძოდ როგორ უნდა გამოვიანგარიშოთ მოთხოვნილი შეწოვის მოცულობითი სიჩქარისთვის რა სიმძლავრის ძრავა დაგჭირდება თუ მოცემული გვაქვს შემწოვი მილის პარამეტრები (სიგრძე და განივკვეთის რადიუსი).

სიმარტივისთვის ჩავთვალოთ,

რომ ღია სივრციდან მილში შეწოვის ადგილში ხახუნის შეგვიძლია უგულებელვყოთ, ხოლო დანარჩენ მილის მთელ სიგრძეზე სიბლანტით გამოწვეულ ხახუნს გავითვალისწინებთ.

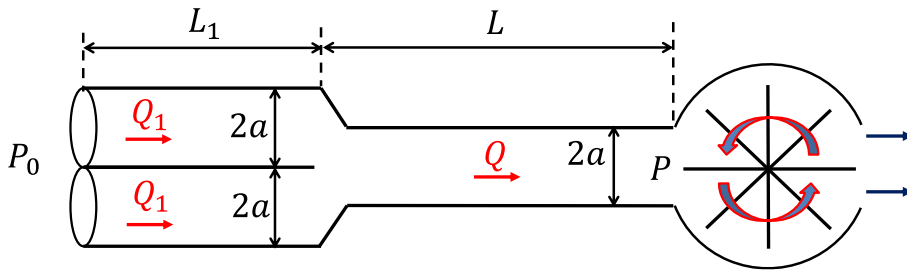
C.1 გამოითვალეთ როგორი უნდა იყოს ძრავის სასარგებლო სიმძლავრე W , იმისთვის რომ განხორციელდეს ამწოვ მილში ღია სივრციდან შეწოვის Q მოცულობითი სიჩქარე. მოცემული გვაქვს მილის განივკვეთის რადიუსი a , მილის სიგრძე L მანძილის, აირის სიბლანტე η და აირის სიმკვრივე ρ . **2.5 pt.**

მითითება: გამოიყენეთ **A.2** -ში მიღებული შედეგი და შეხედეთ ნახატ 5 -ს.

C.2 გამოითვალეთ როგორი უნდა იყოს ძრავის სასარგებლო სიმძლავრე W იმავე პარამეტრების შემთხვევაში, ოღონდ ამჯერად გაითვალისწინეთ სიმალეების სხვაობა H ძრავასა და ამწოვ კარადას შორის. **1.0 pt.**

C.3 გამოიკვლიეთ სასარგებლო სიმძლავრის რა ნაწილი იხარჯება ხახუნის და სიმალეთა სხვაობის გადალახვაზე, ანუ შეაფასეთ სიდიდეები $[W(\eta, H) - W(\eta, H = 0)]/W(\eta, H)$ და $[W(\eta, H) - W(\eta = 0, H)]/W(\eta, H)$ თუ მოცემულია ამწოვი სისტემის პარამეტრების რიცხვითი მნიშვნელობები: $Q = 0.5 \text{ მ}^3/\text{წმ}$, $a = 0.1 \text{ მ}$, $L = 20 \text{ მ}$, $\eta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ კგ/მ} \cdot \text{წმ}$, $\rho = 1.25 \text{ კგ/მ}^3$ და $H = 4 \text{ მ}$. **0.5 pt.**

ნაწილი D: განშტოებები და ხვრელები ამწოვით სისტემაში (4.0 ქულა)



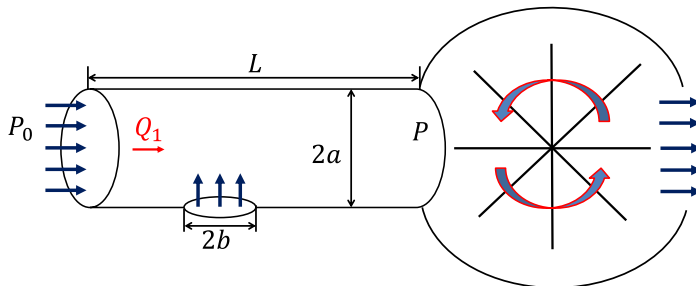
ნახატი 6: ორი ამწოვი კარადის შეერთების სქემა.

კარადის შეერთებისას გვქონდა. შეერთების სქემა მოცემულია ნახატ 6-ზე. შეწოვის და მიღების გადაერთების ადგილებში ხახუნის ეფექტები უგულებელყავით.

ახლა კი ჩვენი მიზანია გავარკვიოთ, როგორ უნდა გავზარდოთ ძრავის სასარგებლო სიმძლავრე, თუ გვინდა, რომ ერთი ნაცვლად მას ორი ერთნაირი გამწოვი კარადა მივუერთოთ ისე, რომ თითოეულის შეწოვის მოცულობითი სიჩქარე იგივე იყოს, რაც ერთი

D.1 გამოითვალეთ როგორი უნდა იყოს ძრავის სასარგებლო სიმძლავრე W იმისთვის, რომ თითოეულ ამწოვ მილში განხორციელდეს ღია სივრციდან შეწოვის Q_1 მოცულობითი სიჩქარე. ცენტრალური და განშტოებითი მილების განივკვეთის რადიუსებია a , ცენტრალური მილის სიგრძეა L , ხოლო განშტოებების სიგრძეებია L_1 მანძილის, აირის სიბლანტე არის η და აირის სიმკვრივეა ρ . **2.0 pt.**

D.2 სიბლანტის შედეგად გამოწვეული ხახუნი ყველგან უგულებელყავით და გამოითვალეთ რამდენჯერ უნდა გავზარდოთ ძრავის სასარგებლო სიმძლავრე თუ გვინდა, რომ ერთი ნაცვლად მას ორი ერთნაირი გამწოვი კარადა მივუერთოთ ისე, რომ თითოეულის შეწოვის მოცულობითი სიჩქარე იგივე იყოს, რაც ერთი კარადის შეერთებისას გვქონდა. **0.5 pt.**



ნახატი 7: აირის დინება ნახვრეტიან მილში.

წარმოვიდგინოთ ახლა, რომ მილში გვაქვს b დიამეტრის წრიული ხვრელი (იხილეთ ნახატი 7). სიბლანტის შედეგად გამოწვეული ხახუნი და ხახუნი მილის კედლებზე ისევ ყველგან უგულებელყავით.

D.3 გამოითვალეთ როგორი უნდა იყოს ძრავის სასარგებლო სიმძლავრე W იმისთვის, რომ თითოეულ ამწოვ მილში განხორციელდეს ღია სივრციდან შეწოვის Q_1 მოცულობითი სიჩქარე. მილის განივკვეთის რადიუსია a , აირის სიმკვრივეა ρ და წრიული ხვრელის დიამეტრია b . **1.5 pt.**

ამოცანის ამოხსნისას შესაძლოა დაგჭირდეთ შემდეგი ფორმულები:

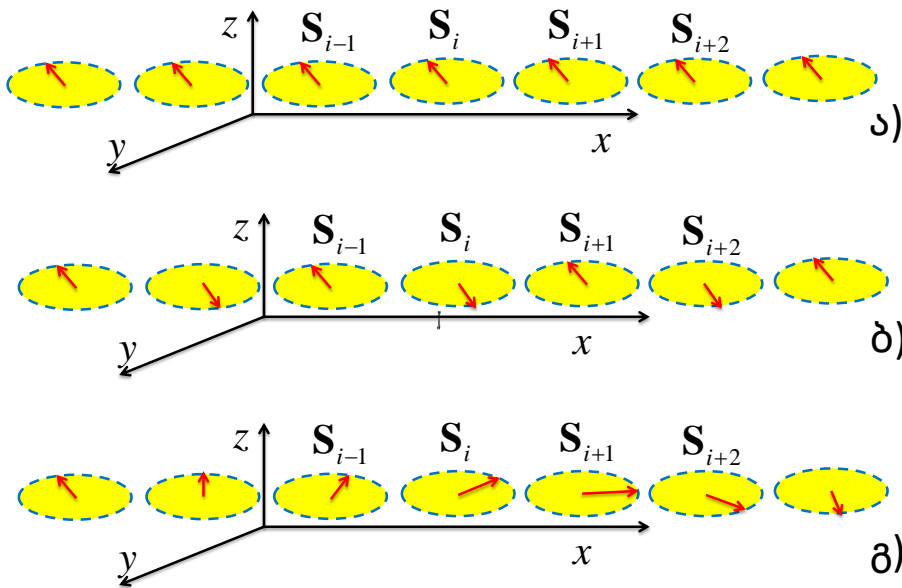
$$\int x e^{ax^2} dx = \frac{1}{2a} e^{ax^2} + C$$

ამოცანა 2

მაგნიტური მოწესრიგებულობა სპინურ ჯაჭვებში (5 ქულა)

ამ ამოცანაში ჩვენ განვიხილავთ ჰაიზენბერგის ქვანტური სპინური ჯაჭვის მოდელის კლასიკურ ინტერპრეტაციას, რომელიც პრინციპში საშუალებას იძლევა ერთის მხრივ გავითვალისწინოთ ისეთი ქვანტურ მექანიკური მოვლენა, როგორცაა სპინებს შორის გაცვლითი ურთიერთქმედება, ხოლო სხვა მხრივ კი გვაძლევს მაკროსკოპიკული დინამიკისა და თერმოდინამიკის სწორ აღწერას ერთგანზომილებიან სპინურ სისტემებში. კერძოდ, ჩვენ განვიხილავთ სხვადასხვა ტიპის მაგნიტურად მოწესრიგებული მდგომარეობების (ფერომაგნიტური, ანტიფერომაგნიტური და სპირალური) განხორციელების პირობებს დაბალ ტემპერატურებზე. სტატისტიკური მექანიკიდან ცნობილია, რომ თერმოდინამიკურ წონასწორობაში სისტემის მდგომარეობა გამოითვლება თავისუფალი ენერჯიის მინიმიზაციის პირობიდან, რაც დაბალი ტემპერატურების დროს ($T \rightarrow 0$) სპინური სისტემის ენერჯიის მინიმუმის პოვნის ამოცანაზე დადის. კლასიკური სპინური ჯაჭვების ყველაზე მარტივი მოდელია მხოლოდ უახლოეს მეზობლებს შორის ურთიერთქმედებით შემოფარგვლა და უსასრულო იზოტროპიული სპინური ჯაჭვის სრული ენერჯიის შემდეგნაირად ჩაწერა

$$E = -J \sum_n (\vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1})$$



ნახატი 8: სპინური ჯაჭვების სქემატური ნახაზი. ა) ფერომაგნიტური, ბ) ანტიფერომაგნიტური და გ) სპირალური სტრუქტურები.

სადაც \vec{S}_n წარმოადგენს სპინური ჯაჭვის მე- n კვანძში მოთავსებულ ერთეულოვან სიგრძეზე ნორმალიზებულ მაგნიტური მომენტს, ანუ $(\vec{S}_n)^2 = (S_n^x)^2 + (S_n^y)^2 + (S_n^z)^2 = 1$, ხოლო J უახლოეს მეზობლებს შორის გაცვლითი ურთიერთქმედების მუდმივაა. ცხადია, რომ ენერჯიის მინიმუმი $J > 0$ შემთხვევაში მიიღწევა ფერომაგნიტური მოწესრიგების შემთხვევაში, ანუ როცა ყველა \vec{S}_n მაგნიტური მომენტი ერთიდაიგივე მიმართულებითაა, როგორც ეს ნახატ 8 ა)-ზეა წარმოდგენილი. ხოლო თუ $J < 0$, ანტიფერომაგნიტური წესრიგი ხორციელდება, ანუ როცა მეზობელი სპინები ანტიპარალელურია $\vec{S}_n = -\vec{S}_{n+1}$ ერთიდაიგივე ღერძის მიმართ (იხილეთ ნახატი 8 ბ). და ბოლოს სპირალური სტრუქტურები, რომელთა ერთ-ერთი კერძო შემთხვევაა ნახატ 8 გ)- ზე წარმოდგენილის სპინური მოწესრიგება, რაც შეიძლება

ჩაიწეროს შემდეგი მარტივი ფორმით:

$$S_n^x = \cos(qn), \quad S_n^y = \sin(qn), \quad S_n^z = 0$$

სადაც q -ს სპირალის ბიჯი ეწოდება. უნდა აღინიშნოს, რომ ფერომეგნიტური სტრუქტურა სპირალური მოწესრიგების კერძო შემთხვევაა, როცა $q = 0$, ასევე ანტიფერომეგნიტურიც, ოღონდ მისი შესაბამისი სპირალის ბიჯი $q = \pi$.

შევნიშნოთ, რომ ყველა ფორმულაში ქვედა ინდექსი წარმოადგენს რიგით ნომერს, ხოლო ზედა ინდექსი კი შესაბამის ღერძზე გეგმილს.

კონკრეტულ მარტივ შემთხვევებში მოწესრიგებულობის ღერძები შეიძლება ნებისმიერი მიმართულებით იყოს, თუმცა ქვემოთ წარმოდგენილ უფრო რთულ შემთხვევებში მაგნიტური მომენტების მიმართულება ენერგიის მინიმუმის პირობიდან გამოითვლება. გასათვალისწინებელია ამ მინიმუმის დროს ერთეულოვანი სიგრძის პირობის გათვალისწინებაც, ანუ ენერგიის მინიმუმი უნდა ვეძებოთ $(S_n^x)^2 + (S_n^y)^2 + (S_n^z)^2 = 1$ პირობის არსებობისას. ასეთი ამოცანები, როგორც წესი, ლაგრანჟის მამრავლების ფორმალიზმით იხსნება, მაგრამ ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში (რაც ამ ამოცანაშია მოყვანილი) სრულიად საკმარისია ინტუიტიურ მოსაზრებებზე დამყარებული უმარტივესი ალგებრული გამოთვლების შესრულება.

ნაწილი A: ფერომეგნიტური და ანტიფერომეგნიტური მოწესრიგებულობა (2.5 ქულა)

დავიწყოთ ანიზოტროპული ფერომეგნიტური ურთიერთქმედების $J > 0$ შემთხვევით

$$E = -J \sum_n (\vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1}) - K \sum_n (S_n^z)^2$$

სადაც შემოტანილია დამატებითი წევრი, რომელიც კრისტალურ ანიზოტროპიას აღწერს. K არის ამ ანიზოტროპიის მუდმივა.

A.1 გამოიკვლიეთ ორივე $K > 0$ და $K < 0$ შემთხვევები. ჩაწერეთ S_n^x , S_n^y და S_n^z - ის რა მნიშვნელობებისთვის ხორციელდება ენერგიის მინიმუმი თითოეულ შემთხვევაში. **0.5 pt.**

ახლა განვიხილოთ x ღერძის მიმართულებით მოქმედი H გარე მაგნიტური ველი იზოტროპულ ფერომეგნიტიკში:

$$E = -J \sum_n (\vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1}) - H \sum_n S_n^x$$

აქ ისევ $J > 0$.

A.2 როგორი S_n^x , S_n^y და S_n^z -ის მნიშვნელობებისთვის ხორციელდება ენერგიის მინიმუმი? **0.5 pt.**

მაგნიტური ველი ანიზოტროპიულ შემთხვევაში, სადაც კვლავ ფერომეგნიტური ურთიერთქმედება გვაქვს $J > 0$:

$$E = -J \sum_n (\vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1}) - K \sum_n (S_n^z)^2 - H \sum_n S_n^x$$

A.3 როგორი S_n^x , S_n^y და S_n^z -ის მნიშვნელობებისთვის ხორციელდება ენერგიის მინიმუმი? განიხილეთ ორივე $K > 0$ და $K < 0$ შემთხვევები ცალკე-ცალკე. გამოიკვლიეთ როგორი მაგნიტური ვლებისთვისაა ყველა სპინი მაგნიტური ველის მიმართულებით $K > 0$ შემთხვევაში. **1.0 pt.**

განვიხილოთ ახლა მაგნიტური ველი ანტიფერომეგნიტიკებში, ანუ ვწერთ იგივე სახის

ენერგიას სპინური ჯაჭვისთვის,

$$E = -J \sum_n (\vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1}) - H \sum_n S_n^x$$

ოლონდ $J > 0$. უნდა გამოვიკვლიოთ მინიმალური ენერჯისთვის დამახასიათებელი სპინური სტრუქტურა.

A.4 როგორი S_n^x , S_n^y და S_n^z -ის მნიშვნელობებისთვის ხორციელდება ენერჯის მინიმუმი? როგორი H მაგნიტური ველისთვის მიიღწევა ფერომაგნიტური მოწესრიგებულობა მაგნიტური ველის მიმართულებით? **0.5 pt.**

ნაწილი B: სპირალური სტრუქტურები ფრუსტრირებულ და მულტიფეროიკულ მესერებში (2.5 ქულა)

სპირალური სტრუქტურები არატრივიალური ბიჯით (ანუ თუ $q \neq 0$ და $q \neq \pi$) შეიძლება განხორციელდეს მხოლოდ იმ შემთხვევაში თუ უახლოესი მეზობლების გარდა კიდევ სხვა სპინებთან ურთიერთქმედებასაც მივიღებთ მხედველობაში. ამის ერთ-ერთი კანდიდატია ფრუსტრირებული სისტემები ($K > 0$):

$$E = -J_1 \sum_n (\vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1}) - J_2 \sum_n (\vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+2}) + K \sum_n (S_n^z)^2$$

სადაც J_1 და J_2 შესაბამისად უახლოეს და უახლოესის მომდევნო სპინებთან გაცვლითი ურთიერთქმედების მუდმივებია. K კი ანიზოტროპიის დადებითი მუდმივაა.

B.1 ენერჯის მინიმიზაციით გამოიკვლიეთ სხვადასხვა J_1 და J_2 -ის ნიშნებისა და თანაფარდობის შემთხვევაში როგორი სტრუქტურები (ფერომაგნიტური, ანტიფერომაგნიტური თუ სპირალური) ხორციელდება. დაადგინეთ როგორ იქნება q სპირალის ბიჯი J_1 და J_2 -ზე დამოკიდებული. განიხილეთ შემდეგი შემთხვევები:

- a. $J_1 > 0$ და $J_2 < 0$;
- b. $J_1 > 0$ და $J_2 > 0$
- c. $J_1 < 0$ და $J_2 < 0$
- d. $J_1 < 0$ და $J_2 > 0$

თითოეული შემთხვევისათვის განიხილეთ 2 შემთხვევა: როცა $\left| \frac{J_1}{4J_2} \right| > 1$ და $\left| \frac{J_1}{4J_2} \right| < 1$.

მულტიფეროიკების აღწერა, სადაც გვაქვს ერთდროულად მაგნიტური და ელექტრული მოწესრიგებულობა, ფენომენოლოგიურად ძიალოშინსკი-მორიას ურთიერთქმედებით აღიწერება. ასეთ სისტემებში გვაქვს ფერომაგნიტური $J_1 > 0$ სიმეტრიული გაცვლითი და აგრეთვე ანტისიმეტრიული გაცვლითი ურთიერთქმედება. ასე რომ

$$E = -J_1 \sum_n (\vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1}) - \sum_n \vec{D} \cdot [\vec{S}_n \times \vec{S}_{n+1}]$$

სადაც ძიალოშინსკი- მორიას \vec{D} ვექტორს ნებისმიერი მიმართულება შეიძლება ჰქონდეს. რაც შეეხება ელექტრულ პოლარიზაციას, იგი გამოითვლება ფორმულით:

$$\vec{P}_n = g_{EM} \vec{a} \times [\vec{S}_n \times \vec{S}_{n+1}]$$

სადაც g_{EM} მაგნიტო-ელექტრული ბმის კონსტანტაა, ხოლო \vec{a} არის მეზობელი სპინების დამაკავშირებელი რადიუს ვექტორი. ჩვენი კითხვები ასეთ სტრუქტურებში მაგნიტურ და ელექტრულ მოწესრიგებულობას შეეხება.

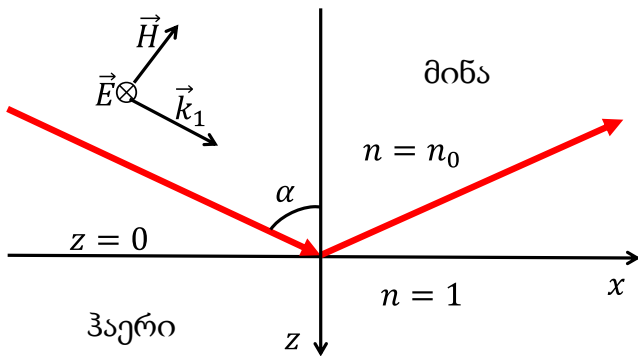
B.2	ენერჯის მინიმიზაციით გამოიკვლიეთ J_1 და $ \vec{D} $ -ის სხვადასხვა თანაფარდობის დროს როგორი იქნება სპირალის ბიჯი q .	0.5 pt.
------------	--	----------------

B.3	რა მიმართულება უნდა ჰქონდეს ძიალოშინსკი-მორიას \vec{D} ვექტორს იმისთვის, რომ ელექტრული პოლარიზაცია იყოს მაქსიმალური.	1.0 pt.
------------	--	----------------

ამოცანა 3

ბარიერსქვეშ გაჟონვა: „ნაწილობრივი“ შინაგანი არეკვლა (10 ქულა)

ბარიერსქვეშა გაჟონვა ქვანტური მექანიკის ერთ-ერთი საწყისი საბაზისო ამოცანაა, რომელიც აჩვენებს განსხვავებას ქვანტურ და კლასიკურ პროცესებს შორის. კერძოდ, კლასიკურ მექანიკაში თუ ნაწილაკის ენერგია ნაკლებია ენერგეტიკული ბარიერის სიმაღლეზე, მაშინ ბარიერის გადალახვა ვერანაირად მოხდება, აი ქვანტურ მექანიკაში კი ნაწილაკის მიერ ბარიერის მიღმა გასვლის ალბათობა იგივე საწყისი ენერგიის შემთხვევაში არაა ნულის ტოლი. ეს მოვლენა ექსპერიმენტურად დადასტურებულია და კავშირშია ნაწილაკის ტალღურ ბუნებასთან. მეორეს მხრივ კი, რატომაც არ უნდა შეიძლებოდეს ჩვეულებრივი კლასიკური ტალღებისთვის ანალოგიური პროცესის დაკვირვება და ეს ამოცანა ეძღვნება სწორედ სინათლის ტალღების გაჟონვის მექანიზმის დადგენას სრული შინაგანი არეკვლის რეჟიმში, როდესაც გარდატეხის მაჩვენებლით შექმნილი „ბარიერის“ სიგანე სინათლის ტალღის სიგრძის რიგისაა. ამოცანას დავიწყებთ ორი გარემოს გამყოფ ზედაპირზე სინათლის ტალღის ელექტრული და მაგნიტური ველების მნიშვნელობების დადგენით სრული შინაგანი არეკვლის რეჟიმში, ანუ როდესაც სინათლე ოპტიკურად მეტად მკვრივი გარემოდან ნაკლებად მკვრივ გარემოში ვერ გადადის. თავიდან შევისწავლით შემთხვევას, როცა გამყოფი ზედაპირის ორივე მხარეს



ნახატი 9: სინათლის ტალღის დაცემის გეომეტრია მინა-ჰაერის გამყოფ ზედაპირზე.

ერთგვაროვანი (ოღონდ სხვადასხვა გარდატეხის მაჩვენებლიანი) უსასრულო გარემოა, ვთქვათ მინა ერთ მხარეს და ჰაერი მეორე მხარეს და სინათლე მინიდან ეცემა მინა-ჰაერის გამყოფ ზედაპირს. ელექტრომაგნიტური ველების სურათის დადგენა სრული შინაგანი არეკვლის რეჟიმში დაგვეხმარება ამოცანის მეორე ნაწილში მთავარი პრობლემის გადაჭრაში, როცა განვიხილავთ ჰაერის თხელ ფენაში სინათლის გაჟონვას მინის გარემოდან სრული შინაგანი არეკვლის რეჟიმში.

ნაწილი A: ველების განაწილება სრული შინაგანი არეკვლის დროს (3.5 ქულა)

კოჰერენტული სინათლის ტალღის ელექტრული და მაგნიტური ველის კომპონენტები ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + (\vec{E}_0)^* e^{i(\omega t - (\vec{k})^* \cdot \vec{r})}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + (\vec{H}_0)^* e^{i(\omega t - (\vec{k})^* \cdot \vec{r})} \quad (1)$$

ზედა ინდექსად * ნიშანი წარმოადგენს კომპლექსურად შეუღლებულ სიდიდეს, ანუ: $(a + bi)^* = a - bi$.

სინათლის გავრცელების ჩვეულებრივ რეჟიმებში ტალღური ვექტორი ნამდვილი სიდიდეა, ანუ $\vec{k} = (\vec{k})^*$ და ელექტრული და მაგნიტური ველები სკალარში ჩვენთვის ცნობილ სახეზე დაიყვანება: $\vec{E} \sim \vec{H} \sim \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$. ხოლო შეზღუდულ გეომეტრიაში (რისი ერთ-ერთი მაგალითი სრული შინაგანი არეკვლაცაა) ტალღური რიცხვის კომპლექსური სახით

წარმოდგენა უფრო მოსახერხებელია და ამიტომ ზემოთა ფორმულებით უფრო მარტივია რომ ვისარგებლოთ. მაქსველის განტოლებები ასეთ შემთხვევაში დაიყვანება შემდეგ თანაფარდობებზე:

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \mu\omega\vec{H}_0; \quad \vec{k} \times \vec{H}_0 = -\varepsilon\omega\vec{E}_0; \quad \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0; \quad \vec{k} \cdot \vec{H}_0 = 0 \quad (2)$$

სადაც μ და ε გარემოს მაგნიტური და ელექტრული შეღწევადობებია.

A.1 (2) განტოლებებიდან გამოიყვანეთ სინათლის დისპერსიის კანონი (სინათლის სიხშირის ტალღურ ვექტორზე დამოკიდებულება), ანუ გამოითვალეთ ω როგორც ტალღური ვექტორის გეგმილების k_x, k_y, k_z , გარდატეხის მაჩვენებლის n და c სინათლის სიჩქარის ფუნქცია. **1.0 pt.**

მითითება: გარემოს გარდატეხის მაჩვენებელი განიმარტება შემდეგი თანაფარდობიდან $\mu\varepsilon = n^2/c^2$.

(2) -ის გარდა მაქსველის განტოლებები იძლევიან ელექტრული და მაგნიტური ველების გამყოფი ზედაპირის პარალელური კომპონენტების გადაბმის პირობებსაც გამყოფ ზედაპირზე (იხილეთ ნახატი 9, სადაც გამყოფი ზედაპირი არის $z = 0$):

$$E_1^y = E_2^y; \quad H_1^x = H_2^x \quad (3)$$

არ ვწერთ კიდევ სხვა კომპონენტების გადაბმის პირობებს, იმიტომ რომ ეს ორი პირობაც საკმარისია შემდგომი გამოთვლებისთვის.

ამოცანა შემდეგნაირად ისმება: ვთქვათ, $z = 0$ გამყოფ ზედაპირს (იხილეთ ნახატი 9) ეცემა ბრტყელი ტალღა ω_1 სიხშირით და ტალღური ვექტორით \vec{k}_1 , რომლის ღერძებზე გეგმილები ნამდვილი რიცხვებია. ჩვენი მიზანია გამოვითვალოთ არეკვლილი და გამყოფი ზედაპირის მეორე მხარეს გადასული სინათლის ტალღის ელექტრული და მაგნიტური ველების ამპლიტუდები და ტალღური ვექტორები. პირველ ყოვლისა, ადვილად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ კოორდინატთა ღერძები ისე შეგვიძლია ავირჩიოთ, რომ \vec{k} ტალღური ვექტორი xz სიბრტყეში იყოს მოთავსებული. მაშინ ცხადია, რომ ელექტრული ველის y ღერძზე გეგმილი დაცემული ტალღისთვის გამოისახება (1)-ის თანახმად როგორც:

$$E_y = E_0^I e^{-i(\omega_1 t - k_1^x x - k_1^z z)} + (E_0^I)^* e^{i(\omega_1 t - k_1^x x - k_1^z z)} \quad (4)$$

ელექტრული ველის დანარჩენ გეგმილებს ვიღებთ ნულის ტოლად დაცემულ ტალღაში და აგრეთვე სიმარტივისთვის ვიღებთ $E_0^I = (E_0^I)^*$. პირველ ყოვლისა, ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ მაგნიტური ველი ამ ტალღისთვის. ამოცანის ფარგლებში ჩვენ არამაგნიტურ გარემოს განვიხილავთ და ამიტომ $\mu = \mu_0$ გამყოფი ზედაპირის ორივე მხარეს. რა თქმა უნდა დაცემული სინათლის ტალღის მაგნიტური ველის სივრცე-დროითი განაწილება (4) -ის ანალოგიურად ჩაიწერება:

$$H_x = H_0^I e^{-i(\omega_1 t - k_1^x x - k_1^z z)} + (H_0^I)^* e^{i(\omega_1 t - k_1^x x - k_1^z z)}$$

სადაც H_0^I მაგნიტური ველის x მდგენელის ამპლიტუდაა დაცემული ტალღისთვის.

A.2 გამოსახეთ (2) -ის დახმარებით H_x ელექტრული ველის ამპლიტუდა E_0^I ელექტრული ველის ამპლიტუდით, სიხშირის ω_1 და ტალღური ვექტორის მდგენელების k_1^x და k_1^z -ის საშუალებით. **0.5 pt.**

(3) გადაბმის პირობებიდან $z = 0$ -ზე გვაქვს ელექტრული და მაგნიტური ველების არგუმენტების ტოლობა პირველ (მინა) და მეორე (ჰაერი) გარემოში:

$$\omega_1 t - k_1^x x = \omega_2 t - k_2^x x - k_2^y y$$

და იმ პირობიდან, რომ ეს ტოლობა ნებისმიერი დროის მომენტისთვის და სივრცის წერტილისთვის უნდა შესრულდეს, გვაქვს ტოლობები:

$$\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega; \quad k_1^x = k_2^x \equiv k_x; \quad k_2^y = 0.$$

A.3 ამ თანაფარდობებიდან გამოითვალეთ k_2^z . გარდატეხის მაჩვენებელი **0.5 pt.**
ჰაერში ჩათვალეთ ერთის ტოლად ($n = 1$) და მოცემულია დაცემული
ტალღის k_1 , დაცემის კუთხე α და მინის გარდატეხის მაჩვენებელი $n = n_0$.

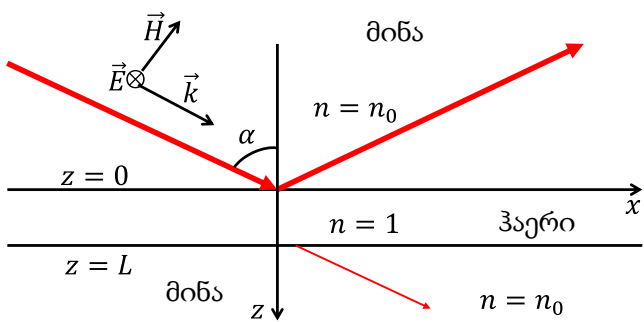
k_2^z წარმოსახვითი რიცხვი იქნება სრული შინაგანი არეკვლის რეჟიმში $\sin\alpha > 1/n_0$ და ამიტომ კორექტულად უნდა ჩავწეროთ ელექტრული და მაგნიტური ველების სივრცე-დროითი გამოსახულებები ჰაერში და აგრეთვე არეკვლილი ტალღის ველების განაწილებები მინაში. ამ ჩაწერის შემდეგ მზად ვიქნებით გამოვიყენოთ (3) გადაბმის პირობები გამყოფ $z = 0$ ზედაპირზე.

A.4 ჩაწერეთ $z = 0$ გამყოფ ზედაპირზე გადაბმის პირობები მინაში ($z < 0$) და **1.0 pt.**
ჰაერში არსებული ($z > 0$) ელექტრული ველის სივრცე-დროითი განაწილებებისთვის სრული შინაგანი არეკვლის რეჟიმში. გარდატეხის
მაჩვენებელი ჰაერში ჩათვალეთ ერთის ტოლად ($n = 1$) და მოცემულად
ჩათვალეთ დაცემული ტალღის ელექტრული ველის ამპლიტუდა E_0^I ,
ტალღის სიხშირე ω , დაცემის კუთხე α და მინის გარდატეხის
მაჩვენებელი $n = n_0$. გამოითვალეთ გამყოფი ზედაპირიდან არეკვლილი
ტალღის ამპლიტუდა E_0^R .

მითითება: გაითვალისწინეთ, რომ $z \rightarrow \infty$ ზღვარში ელექტრული და მაგნიტური ველები სასრულო მნიშვნელობებს უნდა იღებდნენ.

A.5 დაამტკიცეთ, რომ სრული შინაგანი არეკვლის რეჟიმში $\sin\alpha > 1/n_0$ **0.5 pt.**
დაცემული და არეკვლილი ტალღების ამპლიტუდები მოდულით
ერთმანეთის ტოლია, ანუ $|E_0^R| = |E_0^I|$. იპოვეთ ფაზის წანაცვლება დაცემულ
და არეკვლილ ტალღას შორის.

ნაწილი B: სინათლის გაჟონვა ჰაერის თხელ ფენაში (6.5 ქულა)



ნახატი 9: სინათლის ტალღის გაჟონვის სქემა ჰაერის თხელ ფენაში.

გვაქვს ჰაერის თხელი ფენა მინის გარემოში და ვიხილავთ სინათლის დაცემას მინიდან როგორც ეს მე-10 ნახატზეა წარმოდგენილი. მინა-ჰაერი-მინის გამყოფი ზედაპირებია $z = 0$ და $z = L$. დაცემული ტალღის ელექტრული ველი ისევ მოცემულია ფორმულით
 $E_y = E_0^I e^{-i(\omega_1 t - k_1^x x - k_1^z z)} + (E_0^I)^* e^{i(\omega_1 t - k_1^x x - k_1^z z)}$
და სიმარტივისთვის ისევ ვიღებთ: $E_0^I = (E_0^I)^*$. ხოლო რაც შეეხება ჰაერის ფენიდან ისევ მინაში გაჟონილ ტალღას, ანუ $z > L$ არეს, ცხადია, რომ აქაც დაცემული ველის

ანალოგიური სურათი გვქეძება, ანუ

$$E_y = E_0^T e^{-i(\omega_1 t - k_1^x x - k_1^z z)} + (E_0^T)^* e^{i(\omega_1 t - k_1^x x - k_1^z z)}$$

ჩვენი მიზანია E_0^T გაჟონილი ტალღის ამპლიტუდის გაგება.

B.1 ჩაწერეთ სივრცე-დროითი განაწილებები მინაში ($z < 0$ და $z > L$) და **3.5 pt.**
ჰაერის ფენაში არსებული ($0 < z < L$) ელექტრული და მაგნიტური
ველების კომპონენტებისთვის.

B.2

$z = 0$ და $z = L$ გამყოფ ზედაპირებზე გადაბმის პირობებიდან გამოითვალეთ არეკვლილი E_0^R და ჰაერის ბარიერში გაჟონილი E_0^T ელექტრული ველის ამპლიტუდები სრული შინაგანი არეკვლის რეჟიმში $\sin \alpha > 1/n_0$. ამჟერადაც გარდატეხის მაჩვენებელი ჰაერში ჩათვალეთ ერთის ტოლად ($n = 1$) და მოცემულად ჩათვალეთ დაცემული ტალღის ელექტრული ველის ამპლიტუდა E_0^I , ტალღის სიხშირე ω , დაცემის კუთხე α და მინის გარდატეხის მაჩვენებელი $n = n_0$. გამოითვალეთ გაჟონვის კოეფიციენტი $|E_0^T|^2 / |E_0^I|^2$.

3.0 pt.