

ამოცანა 1. ვთქვათ, n მთელი დადებითი რიცხვია. განვიხილოთ $1, 2, \dots, n$ მიმდევრობის $a_1, a_2, \dots, a_n$ გადანაცვლება, რომელსაც აქვს თვისება

$$a_1 \leq 2a_2 \leq 3a_3 \leq \dots \leq na_n. \quad (*)$$

იპოვეთ ყველა ასეთი გადანაცვლებების რაოდენობა.

ამოხსნა: P_n -ით აღვნიშნოთ იმ გადანაცვლებათა რაოდენობა, რომლებიც აკმაყოფილებენ (*) პირობას. ცხადია, რომ $P_1 = 1$ და $P_2 = 2$.

ლემა. ვთქვათ, $n \geq 3$. თუ $a_1, a_2, \dots, a_n$ გადანაცვლება აკმაყოფილებს (*) პირობას, მაშინ ან $a_n = n$ ან $a_{n-1} = n$ და $a_n = n - 1$.

დამტკიცება. ვთქვათ k არის ისეთი ინდექსი, რომ $a_k = n$. თუ $k = n$ ლემა დამტკიცებულია.

თუ $k = n - 1$ მაშინ (*)-ის თანახმად $n(n - 1) = (n - 1)a_{n-1} \leq na_n$ და ამრიგად $a_n \geq n - 1$. ვინაიდან $a_n \neq a_{n-1} = n$, ამიტომ $a_n = n - 1$.

ვთქვათ ახლა $k \leq n - 2$. ყოველი $k < i < n$ გვაქვს $kn = ka_k \leq ia_i < na_i$ და ამრიგად $a_i \geq k + 1$. ვინაიდან $na_n \geq (n - 1)a_{n-1} \geq (n - 1)(k + 1) = nk + (n - 1 - k) > nk$, ამიტომ $a_n \geq k + 1$. ანუ მივიღეთ $n - k + 1$ ცალი რიცხვი $a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$, რომლებიც მეტია k -ზე, რაც წინააღმდეგობაა ვინაიდან ასეთი რიცხვები მხოლოდ $n - k$ ცალი გვაქვს. ლემა დამტკიცებულია.

თუ $a_n = n$, მაშინ $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ იქნება $1, \dots, n - 1$ მიმდევრობის გადანაცვლება, რომლისთვისაც შესრულდება $a_1 \leq 2a_2 \leq 3a_3 \leq \dots \leq (n - 1)a_{n-1}$ და ამრიგად გვექნება P_{n-1} ცალი ასეთი გადანაცვლება. (*) პირობის ბოლო უტოლობაც სრულდება, ვინაიდან $(n - 1)a_{n-1} \leq na_n = n^2$.

თუ $(a_{n-1}, a_n) = (n, n - 1)$ მაშინ, $a_1 \leq \dots \leq (n - 2)a_{n-2}$ და ამრიგად გვაქვს P_{n-2} ცალი ასეთი გადანაცვლება. (*) უტოლობათა ჯაჭვის ბოლო ორი უტოლობაც სრულდება, ვინაიდან გვაქვს $(n - 2)a_{n-2} \leq (n - 2)^2 < n(n - 1) = (n - 1)a_{n-1} = na_n$.

ამრიგად მივიღეთ, რომ მიმდევრობა $(P_1, P_2, \dots)$ აკმაყოფილებს შემდეგ რეკურენტულ ტოლობას $P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$, როცა $n \geq 3$. ვინაიდან $P_1 = 1$ და $P_2 = 2$ ვღებულობთ, რომ $P_n = F_{n+1}$, სადაც F_n -ით აღნიშნულია

ფიბონაჩის მიმდევრობის n -ური წევრი. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

პასუხი: ასეთი მიმდევრობების რაოდენობა არის F_{n+1} , სადაც F_k არის ფიბონაჩის მიმდევრობის k -ური წევრი, $F_1 = F_2 = 1, F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) განიხილა ისეთი ინდექსი k , რომ $a_k = n$ და აჩვენა, რომ თუ $k = n - 1$ მაშინ $a_n = n - 1$;

ბ) განიხილა შემთხვევა $k \leq n - 2$ და აჩვენა, რომ $a_i \geq k + 1$, როცა $k < i < n$;

გ) აჩვენა, რომ თუ $k \leq n - 2$, მაშინ, $a_n \geq k + 1$;

დ) შენიშნა, რომ თუ $k \leq n - 2$, მაშინ არსებობს გადანაცვლების $n - k + 1$ ცალი რიცხვი, რომლებიც მეტია k -ზე და მიიღო წინააღმდეგობა;

ე) შენიშნა, რომ თუ $a_n = n$, (*) თვისების გადანაცვლებათა რაოდენობა არის P_{n-1} ;

ვ) შენიშნა, რომ თუ $(a_{n-1}, a_n) = (n, n - 1)$ მაშინ, (*) თვისების გადანაცვლებათა რაოდენობა არის P_{n-2} და მიიღო პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)

2 ქ- ა), ბ)

3 ქ- ა), ბ), გ)

5 ქ- ა), ბ), გ), დ)

6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)

7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

ამოცანა 2. ყოველი მარტივი p რიცხვისთვის არსებობს ქვეყანა p - ლანდია, რომელიც აერთიანებს p ცალ კუნძულს. კუნძულები დანომრილია რიცხვებით $1, 2, \dots, p$. ორი კუნძული, რომელთა ნომრებია m და n , შეერთებულია ხიდით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ p ყოფს $(n^2 - m + 1)(m^2 - n + 1)$ -ს. ყოველი ორი ხიდი ერთმანეთს არ კვეთს, თუმცა შესაძლებელია ერთი მათგანი მეორის ზემოთ ან ქვემოთ გადიოდეს.

განვიხილოთ p მარტივი რიცხვი, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისება: შესაბამის p - ლანდიაში მოიძებნება ორი კუნძული, რომლებიც ერთმანეთთან დაკავშირებული არ არიან ხიდების ჯაჭვით, ანუ მოიძებნება ისეთი ორი კუნძული, რომ ერთიდან მეორეში ვერ მივალთ ამ ხიდების გამოყენებით.

დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ასეთი თვისების მქონე მარტივი რიცხვების უსასრულო რაოდენობა.

ამოხსნა: დავამტკიცოთ, რომ თუ $p > 3$ ისეთი მარტივი რიცხვია, რომელიც ყოფს $x^2 - x + 1$ ტიპის რიცხვს, სადაც x მთელია, მაშინ ასეთი p -თვის, p -ლანდიაში მოიძებნება ორი კუნძული რომლებიც ერთმანეთთან არ არიან დაკავშირებული იქ არსებული ხიდების ჯაჭვით.

ვითყვი, რომ m დაკავშირებულია n -თან, თუ კუნძული ნომრით m დაკავშირებულია კუნძულთან ნომრით n .

ამრიგად ხიდი აერთებს m -ს და n -ს, თუ $m \neq n$ და $n \equiv m^2 + 1 \pmod{p}$ ან $m \equiv n^2 + 1 \pmod{p}$. თუ $m^2 + 1 \equiv n \pmod{p}$ მაშინ ხიდზე რომელიც აერთებს m -ს n - თან დავხატოთ ისარი, რომელიც მიმართული იქნება m -დან n - სკენ. ცხადია, რომ თუ $m^2 + 1 \not\equiv m \pmod{p}$ მაშინ m -დან იწყება მხოლოდ ერთი ისარი და არცერთი, წინააღმდეგ შემთხვევაში. ამრიგად ხიდების საერთო რაოდენობა არ აღემატება ისრების საერთო რაოდენობას.

ვთქვათ, $x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $1 \leq x \leq p$. როგორც უკვე აღვნიშნეთ x -დან არ გამოდის არცერთი ისარი.

რადგანაც $(1 - x)^2 - (1 - x) + 1 = x^2 - x + 1$ ამიტომ $(p + 1 - x)^2 + 1 \equiv$

$(p + 1 - x)(\text{mod } p)$ და ე.ი. არ გვაქვს ისარი რომელიც იწყება $p + 1 - x$ -დან. შევნიშნოთ, რომ $x \neq p + 1 - x$. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში ვღებულობთ $x = \frac{p+1}{2}$, ანუ $4(x^2 - x + 1) = p^2 + 3 \not\equiv 0 (\text{mod } p)$, რაც არათავსებადია ტოლობასთან $x^2 - x + 1 \equiv 0 (\text{mod } p)$. ამრიგად x და $p + 1 - x$ განსხვავებული კუნძულებია და არცერთი მათგანიდან ისარი არ იწყება. აქედან გამომდინარე, ხიდების საერთო რაოდენობა p -ლანდიაში არ აღემატება $p - 2$ -ს.

ვთქვათ $1, 2, \dots, p$ წარმოადგენენ G_p გრაფის წვეროებს, ხოლო m და n ერთმანეთთან შეერთებულია წიბოთი მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ ისინი ერთმანეთს უკავშირდებიან ხიდით. მაშინ, როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ G_p -ს წიბოების რაოდენობა ნაკლებია $p - 1$ -ზე, საიდანაც ვასკვნით, რომ გრაფი ბმული არ არის, რაც ცხადია ნიშნავს იმას, რომ არსებობს ორი კუნძული, რომლებიც ერთმანეთს ხიდების ჯაჭვით ვერ უკავშირდება.

ამრიგად ამოცანის ამოხსნის დასამთავრებლად, საჩვენებელი დაგვრჩა, რომ არსებობს უსასრულო რაოდენობა მარტივი p რიცხვებისა, რომლებიც რაღაც მთელი x -თვის ყოფენ $x^2 - x + 1$ -ს. განვიხილოთ სასრული რაოდენობა $p_1, p_2, \dots, p_k$ ასეთი მარტივი რიცხვებისა. მაშინ რიცხვი $(p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_k)^2 - p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$ არ იყოფა არცერთ p_i -ზე და მაშასადამე მისი მარტივი გამყოფი იქნება ყველა p_i -სგან განსხვავებული მარტივი რიცხვი, რომელიც ყოფს $x^2 - x + 1$ ტიპის რიცხვს. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

ამოხსნის ეტაპები

ა) ხიდზე შემოიღო მიმართულების (ისრის) ცნება და აჩვენა, რომ ხიდების საერთო რაოდენობა არ აღემატება ისრების საერთო რაოდენობას;

ბ) აჩვენა, რომ თუ p ისეთია, რომ $x^2 + 1 \equiv x (\text{mod } p)$, სადაც $1 \leq x \leq p$, მაშინ x -დან არ გამოდის არცერთი ისარი;

გ) აჩვენა, რომ თუ $x^2 + 1 \equiv x \pmod{p}$, $1 \leq x \leq p$ მაშინ $p + 1 - x$ -დანაც არ გამოდის არცერთი ისარი;

დ) დაამტკიცა, რომ $x \neq p + 1 - x$;

ე) შენიშნა, რომ ხიდების საერთო რაოდენობა p –ლანდიაში არ აღემატება $p - 2$ -ს;

ვ) შემოიღო G_p გრაფი და ე) პუნქტის გამოყენებით აჩვენა, რომ ის არაბმულია;

ზ) აჩვენა უსასრულო რაოდენობა p რიცხვების არსებობა, რომლებიც ყოფენ $x^2 - x + 1$ ტიპის რიცხვებს და დაასრულა დამტკიცება.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)

2 ქ- ა), ბ)

3 ქ- ა), ბ), გ)

4 ქ- ა), ბ), გ), დ)

5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)

6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 3. სიბრტყეზე მოცემულია $D_1, D_2, \dots, D_n$ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი წრეები, სადაც $n \geq 6$. $R_1, R_2, \dots, R_n$ შესაბამისად მათი რადიუსებია და სრულდება $R_1 \geq R_2 \geq \dots \geq R_n$. ყოველი $i = 1, 2, \dots, n$ რიცხვისთვის აღებულია P_i წერტილი D_i წრიდან. ვთქვათ O არის სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ

$$OP_1 + OP_2 + \dots + OP_n \geq R_6 + R_7 + \dots + R_n.$$

ამოხსნა

ჯერ დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა:

ლემა: ვთქვათ $D_1, D_2, \dots, D_6$ არიან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი წრეები, რომელთა რადიუსებია შესაბამისად $R_1, R_2, \dots, R_6$. ვთქვათ P_i წერტილი აღებულია D_i წრიდან $i = 1, 2, \dots, 6$ და O სიბრტყის ნებისმიერი წერტილია. მაშინ არსებობენ ინდექსები i, j ისეთი, რომ $OP_i \geq R_j$.

ლემის დამტკიცება: ვთქვათ O_i არის D_i წრეწირის ცენტრი. განვიხილოთ სხივები $OO_1, OO_2, \dots, OO_6$. (თუ აღმოჩნდა, რომ O წერტილი ემთხვევა რომელიმე O_i წერტილს, მაშინ OO_i სხივის მიმართულება იყოს ნებისმიერი). ეს სხივები სიბრტყეს დაყოფენ 6 კუთხედ (რომელმე კუთხის სიდიდე შესაძლებელია იყოს მეტი 180° -ზე). მაშინ ცხადია, რომ ერთერთი კუთხის სიდიდე იქნება არაუმეტეს 60° . ვთქვათ ეს კუთხეა $\angle O_i O O_j$. მაშინ $O_i O O_j$ სამკუთხედში $O_i O_j$ გვერდი არ იქნება უდიდესი. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $OO_i \geq O_i O_j \geq R_i + R_j$. მაშასადამე

$$OP_i \geq OO_i - R_i \geq R_i + R_j - R_i = R_j. \text{ რ.დ.გ}$$

თუ აღმოჩნდა, რომ $OO_1, OO_2, \dots, OO_6$ სხივებიდან რომელიმე ორი ერთმანეთს დაემთხვა, მაშინ ლემის დამტკიცება ტრივიალურია.

ახლა დავამტკიცოთ $OP_1 + OP_2 + \dots + OP_n \geq R_6 + R_7 + \dots + R_n$ უტოლობა მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით, როცა $n \geq 6$. თუ $n = 6$, მაშინ უტოლობა სამართლიანია. მართლაც, ლემის ძალით რომელიღაც ინდექსებისათვის $OP_i \geq R_j$, მაშინ

$$OP_1 + OP_2 + \dots + OP_6 \geq OP_i \geq R_j \geq R_6.$$

ვთქათ უტოლობა სამართლიანია რაიმე n , ($n \geq 6$) შემთხვევაში. განვიხილოთ $D_1, D_2, \dots, D_{n+1}$ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი წრეები, სადაც $R_1 \geq R_2 \geq \dots \geq R_{n+1}$.

გამოვიყენოთ ლემა ყველაზე დიდი რადიუსის მქონე ექვსი წრისათვის. მაშინ არსებობენ ინდექსები $1 \leq i, j \leq 6$ ისეთი, რომ $OP_i \geq R_j \geq R_6$. თუ D_i წრეს ამოვადგებთ განხილვიდან, მაშინ ინდუქციის დაშვებით გვექნება

$$OP_1 + \dots + OP_{i-1} + OP_{i+1} + \dots + OP_{n+1} \geq R_7 + \dots + R_{n+1}.$$

თუ ამ უტოლობას შევკრებთ $OP_i \geq R_6$ უტოლობასთან, მაშინ მივიღებთ, რომ ჭეშმარიტია უტოლობა $n+1$ შემთხვევაშიც. რ.დ.გ.

ამოხსნის ეტაპები

- ა) განიხილა $OO_1, OO_2, \dots, OO_6$ სხივები და აღნიშნა, რომ ერთერთი კუთხის სიდიდე იქნება არაუმეტეს 60° ;
- ბ) აღნიშნა, რომ $O_i O O_j$ სამკუთხედში $O_i O_j$ გვერდი არ იქნება უდიდესი;
- გ) დაადგინა, რომ არსებობენ ინდექსები i, j ისეთი, რომ $OP_i \geq R_j$.
- დ) შეამოწმა ინდუქციის ბიჯი $n = 6$ შემთხვევაში;
- ე) განიხილა $D_1, D_2, \dots, D_{n+1}$ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი წრეები და ყველაზე დიდი რადიუსის მქონე ექვსი წრისათვის დაადგინა, რომ არსებობენ ინდექსები $1 \leq i, j \leq 6$ ისეთი, რომ $OP_i \geq R_j \geq R_6$.
- ვ) დაადგინა $OP_1 + \dots + OP_{i-1} + OP_{i+1} + \dots + OP_{n+1} \geq R_7 + \dots + R_{n+1}$ უტოლობა ინდუქციის დაშვებით და D_i წრის განხილვიდან ამოგდებით;
- ზ) დაასრულა დამტკიცება.

შეფასების სქემა

- 1 ქ- ა)
- 2 ქ- ა), ბ)
- 3 ქ- ა), ბ), გ)
- 4 ქ- ა), ბ), გ), დ)
- 5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
- 6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
- 7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 4. ვთქვათ a, b, c და d დადებითი ნამდვილი რიცხვებისთვის სრულდება

$(a+c)(b+d) = ac+bd$ ტოლობა. იპოვეთ $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}$ გამოსახულების უმცირესი

შესაძლო მნიშვნელობა.

ამოხსნა

ვთქვათ $S = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}$. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ $S \geq 8$. გვაქვს

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{d}{a}\right) \geq 2\sqrt{\frac{ac}{bd}} + 2\sqrt{\frac{bd}{ca}} = 2\frac{ac+bd}{\sqrt{abcd}} = \frac{2(a+c)(b+d)}{\sqrt{abcd}} \geq \frac{2 \cdot 2\sqrt{ac} \cdot 2\sqrt{bd}}{\sqrt{abcd}} = 8.$$

შევნიშნოთ, რომ როცა $a=c$ და $b=d$, მაშინ ზემოთ მოყვანილ შეფასებაში უტოლობები შეიცვლება ტოლობებით, ხოლო $(a+c)(b+d) = ac+bd$ პირობა მიიღებს სახეს $4ab = a^2 + b^2$, საიდანაც ვიღებთ $\frac{a}{b} = 2 \pm \sqrt{3}$. ამრიგად, თუ ავიღებთ $a=c=1$ და $b=d=2+\sqrt{3}$, მაშინ სრულდება $(a+c)(b+d) = ac+bd$ ტოლობა და $S=8$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{d}{a}\right) \geq 2\sqrt{\frac{ac}{bd}} + 2\sqrt{\frac{bd}{ca}}$;

ბ) დაადგინა, რომ $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{d}{a}\right) \geq 2\frac{ac+bd}{\sqrt{abcd}}$

გ) დაადგინა, რომ არსებობენ $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{d}{a}\right) \geq 8$

დ) შევნიშნა, რომ როცა $a=c$ და $b=d$, მაშინ ზემოთ მოყვანილ შეფასებაში

უტოლობები შეიცვლება ტოლობებით;

ე) შევნიშნა, რომ როცა $a=c$ და $b=d$, მაშინ $(a+c)(b+d) = ac+bd$ პირობა მიიღებს

სახეს $4ab = a^2 + b^2$;

ვ) დაადგინა, რომ როცა $a=c$ და $b=d$, მაშინ $\frac{a}{b} = 2 \pm \sqrt{3}$;

ზ) აიღო $a=c=1$, $b=d=2+\sqrt{3}$ და აღნიშნა, რომ სრულდება $(a+c)(b+d) = ac+bd$ ტოლობა და $S=8$.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)

2 ქ- ა), ბ)

3ქ- ა) , ბ), გ)

4ქ- ა), ბ), გ), დ)

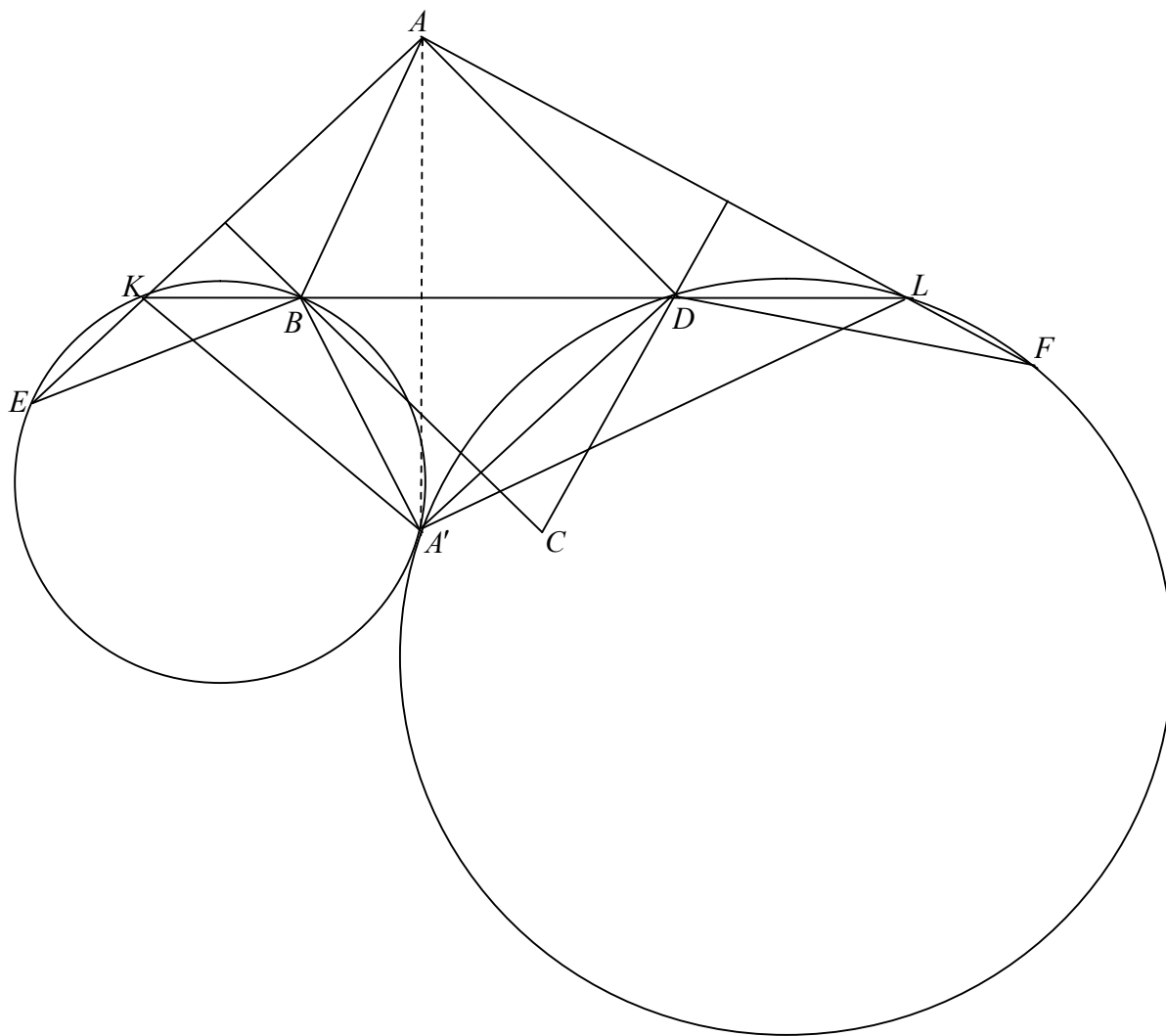
5ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)

6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

7 ქ-ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 5. $ABCD$ ამოზნექილ ოთხკუთხედში $\angle ABC > 90^\circ$, $\angle CDA > 90^\circ$ და $\angle DAB = \angle BCD$. E და F წერტილები არიან A წერტილის სიმეტრიული წერტილები შესაბამისად BC და CD წრეების მიმართ. ვთქვათ AE და AF მონაკვეთები BD წრფეს კვეთენ შესაბამისად K და L წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ BEK და DFL სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირები ეხებიან ერთმანეთს.

ამოხსნა



ვთქვათ A' არის A წერტილის სიმეტრიული BD წრფის მიმართ. დავამტკიცოთ, რომ $A'BKE$ და $A'DLF$ ოთხკუთხედები ციკლურია და მათზე შემოხაზული წრეწირები ეხებიან ერთმანეთს A' წერტილში.

BC წრფის მიმართ სიმეტრიულობის გამო გვაქვს $\angle BEK = \angle BAK$, ხოლო BD წრფის მიმართ სიმეტრიულობის გამო გვაქვს $\angle BAK = \angle BA'K$. ამრიგად $A'BKE$ ოთხკუთხედი ციკლურია. ანალოგიურად გვექნება, რომ $A'DLF$ ოთხკუთხედი ციკლურია.

თუ დავამტკიცებთ, რომ $\angle A'KB + \angle A'LD = \angle BA'D$, მაშინ დამტკიცდება, რომ $A'BKE$ და $A'DLF$ ოთხკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირები ეხებიან ერთმანეთს A' წერტილში.

მართლაც, ვინაიდან $AK \perp BC$, $AL \perp CD$ და A' არის A წერტილის სიმეტრიული BD წრფის მიმართ, ამიტომ

$$\angle A'KB + \angle A'LD = 180^\circ - \angle KA'L = 180^\circ - \angle KAL = \angle BCD = \angle BAD = \angle BA'D.$$

დამტკიცება დასრულებულია.

ამოხსნის ეტაპები

- ა) განიხილა A' , რომელიც არის A წერტილის სიმეტრიული BD წრფის მიმართ;
- ბ) დაადგინა, რომ $\angle BEK = \angle BAK$;
- გ) დაადგინა, რომ $\angle BAK = \angle BA'K$;
- დ) დაადგინა, რომ $A'BKE$ ოთხკუთხედი ციკლურია;
- ე) დაადგინა, რომ $\angle A'KB + \angle A'LD = 180^\circ - \angle KAL$;
- ვ) დაადგინა, რომ $\angle A'KB + \angle A'LD = \angle BAD$;
- ზ) დაასრულა დამტკიცება.

შეფასების სქემა

- 1 ქ- ა)
- 2 ქ- ა), ბ) ან ა), გ)
- 3 ქ- ა), ბ), გ)
- 4 ქ- ა), ბ), გ), დ)
- 5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
- 6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
- 7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 6. ფიბონაჩის მიმდევრობა $a_0, a_1, a_2, \dots$, განსაზღვრულია ფორმულით: $a_0 = 0, a_1 = 1$ და $a_{i+1} = a_i + a_{i-1}$, როცა $i \geq 1$.

მოცემულია მთელი რიცხვი $n \geq 2$. ვთქვათ S არის სიმრავლე, რომელსაც აქვს თვისება: მისი ელემენტები მთელი რიცხვებია და ყოველი $k = 2, 3, \dots, n$ -თვის არსებობს $x \in S, y \in S$ ისეთი, რომ $x - y = a_k$.

სულ მცირე, რამდენ ელემენტს შეიძლება შეიცავდეს S სიმრავლე?

ამოხსნა: ვაჩვენოთ, რომ თუ სიმრავლე $S \subset \mathbb{Z}$ აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას მაშინ $|S| \geq \frac{n}{2} + 1$.

ვთქვათ $d = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, ამრიგად $n \leq 2d \leq n + 1$. ავაგოთ შემდეგი გრაფი G .

გრაფის წვეროები იყოს S სიმრავლის ელემენტები. ყოველი $1 \leq k \leq d$, ამოვირჩიოთ ისეთი ერთი წყვილი ელემენტების $x, y \in S$, რომ

$x - y = a_{2k-1}$ და დავუმატოთ წყვილი (x, y) გრაფის წიბოს. შევნიშნოთ, რომ ამოცანის პირობის თანახმად ყოველი, k -თვის, სადაც

$3 \leq 2k - 1 \leq 2d - 1$, არსებობს ერთი მაინც (x, y) წყვილი ისეთი, რომ $x - y = a_{2k-1}$. რადგანაც $a_1 = a_2$ ასევე გვაქვს წყვილი (x, y) , რომელიც აკმაყოფილებს $x - y = a_1 = 1$ ტოლობას. (x, y) წიბოს სიგრძე ვუწოდოთ სიდიდეს $|x - y|$.

დავამტკიცოთ, რომ G არ შეიცავს ციკლს. დავუშვათ წინააღმდეგობა, ვთქვათ $(x_1, \dots, x_l)$ წარმოადგენს ციკლს, რომლის უდიდესი სიგრძის წიბო არის (x_1, x_l) სიგრძით a_{2m+1} . დანარჩენი $(x_1, x_2), \dots, (x_1, x_l)$ წიბოებიდან ყველას სიგრძე ერთმანეთისაგან განსხვავებულია და ნაკლებია a_{2m+1} -ზე. ამრიგად მათი სიგრძეებია $\{a_1, a_3, \dots, a_{2m-1}\}$ სიმრავლის ქვესიმრავლეა. ეს კი შეუძლებელია, ვინაიდან

$$a_{2m+1} = |x_l - x_1| \leq \sum_{i=1}^{l-1} |x_{i+1} - x_i| \leq a_1 + a_3 + \dots + a_{2m-1} = a_2 + (a_4 - a_2) + \dots + a_{2m} - a_{2m-2} = a_{2m} < a_{2m+1}.$$

ამრიგად, მიღებულ გრაფს აქვს d ცალი წიბო და არ შეიცავს ციკლს, ე. ი. ის შეიცავს სულ მცირე $d + 1$ წვეროს, რაც გვადლევს შეფასებას $|S| \geq d + 1$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $S = \{a_0, a_2, a_4 \dots a_{2d}\}$ სიმრავლე წარმოადგენს მაგალითს $d + 1$ ელემენტური სიმრავლისა, რომელიც აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას.

მართლაც, ყოველი k -თვის, სადაც $1 \leq k \leq d$ გვაქვს $a_0, a_{2k-2}, a_{2k} \in S$ და ამიტომ შეგვიძლია მივიღოთ $a_{2k-1} = a_{2k} - a_{2k-2}$ და ასევე $a_{2k} = a_{2k} - a_0$, ე.ი. ყოველი $a_1, a_2, a_3 \dots a_{2d}$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ S -ის ორი ელემენტის სხვაობით. ამრიგად უმცირესი ზომის S სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს არის $d + 1$.

პასუხი: $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$

ამოხსნის ეტაპები

- ა) შემოიღო გრაფი, რომლის წვეროები S სიმრავლიდანაა, ხოლო წიბოებია (x, y) , თუ $x - y = a_{2k-1}$;
- ბ) შემოიღო წიბოს სიგრძის ცნება და განიხილა $(x_1, \dots, x_l)$ ციკლი;
- გ) განიხილა ციკლის უდიდესი სიგრძის წიბო და შენიშნა რომ დანარჩენი წიბოს სიგრძეები ეკუთვნის $\{a_1, a_3, \dots a_{2m-1}\}$;
- დ) წიბოს უდიდესი a_{2m+1} სიგრძის შეფასებისას მიიღო წინააღმდეგობა და დაასკვნა, რომ გრაფი არ შეიცავს ციკლს;
- ე) განიხილა რიცხვი d და დ) პუნქტის გათვალისწინებით მიიღო შეფასებას $|S| \geq d + 1$;
- ვ) მოიყვანა $d + 1$ ელემენტური სიმრავლის მაგალითი, რომელიც აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას და მიიღო პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)

2 ქ- ა), ბ)

3 ქ- ა), ბ), გ)

5 ქ- ა), ბ), გ), დ)

6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)

7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)