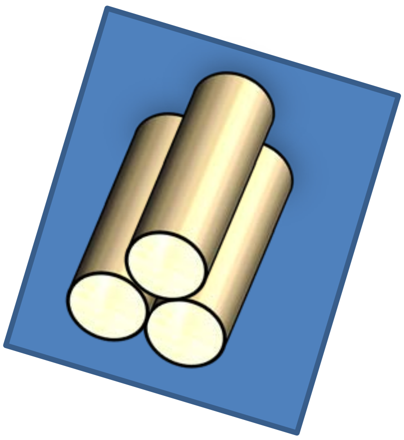
ამოცანა 1

ჩოგბურთის ბურთების კოშკი (10 ქულა)

2019 წელს ქართველი ფიზიკოსი და ჩოგბურთის დიდი მოყვარული ანდრია როგავა კვირდებოდა ჩოგბურთის ბურთებისგან აგებულ სხვადასხვა სახის პირამიდული ტიპის ნაგებობას და მათ მდგრადობას. ყველაზე უფრო უცნაური აღმოჩნდა კოშკის ტიპის ნაგებობები, რომელიც ნახაზზეა გამოსახული. შესაძლებელი იყო თერთმეტ სართულამდე სიმაღლის მიღწევა, ხოლო უფრო მაღალი კოშკი მცირე შეშფოთებისთანავე იშლებოდა. თავიდანვე გასაგები იყო, რომ ნაგებობის სტაბილურობას სიმძიმის და ხახუნის ძალები უზრუნველყოფდნენ, ხოლო რაც შეეხება სრულ ანალიზურ სურათს და მდგრადობის მექანიზმების დადგენას, ეს რთული საქმე აღმჩნდა და ჯერ-ჯერობით არაა ბოლომდე გაგებული და ამოხსნილი. ამჯერად ჩვენ შემოვიფარგლებით მხოლოდ ოთხბურთიანი პირამიდის მდგრადობის კრიტერიუმის დადგენით, რაც ასევე ნახაზზეა გამოსახული.

ნახატი 1: მარცხნივ - ჩოგბურთის ბურთების მრავალსართულიანი კოშკი და მარჯვნივ - ოთხბურთიანი პირამიდა, რაც შეესაბამება კოშკის ზედა ფრაგმენტს



დავიწყოთ მარტივი „ორგანზომილებიანი“ ამოცანით, რაც შეესაბამება სამი ცილინდრული ფორმის ძელების სისტემის მგრადობას. წარმოვიდგინოთ სამი გრძელი მორი, რომლებიც დაწყობილია ისე, როგორც ნახაზზეა გამოსახული. კერძოდ ორი მორი ეხება ერთმანეთს და დევს მიწაზე, ხოლო მესამე მორი დევს ამ ორ მორზე ზემოდან. ამოცანა მდგომარეობს ამ მორების მდგრადობის პირობების გარკვევაში.

ნახატი 2: ცილინდრული ძელების სისტემა

A.1	ჩათვალეთ, რომ ზედაპირს და მორს შორის და მორებს შორის ხახუნის კოეფიციენტები განსხვავებულია. გამოითვალეთ ამ ხახუნის კოეფიციენტების ის ზღვრული მნიშვნელობები, როცა მორების სისტემა არ იშლება.	**2.5 pt.**

A.2	ახლა ჩათვალეთ, რომ ხახუნის კოეფიციენტები მორსა და ზედაპირს და ასევე მორებს შორის ერთი და იგივეა. იპოვეთ ამ კოეფიციენტის ის ზღვრული მნიშვნელობა, როცა მორების სისტემა არ იშლება.	0.2 pt.

A.3	როდესაც ხახუნის კოეფიციენტი წინა პუნქტში ნაპოვნ მნიშვნელობაზე ცოტათი ნაკლებია, რომელი შემხები ზედაპირების მიმართ ისრიალებენ მორები და რომელ ზედაპირაბზე არ ისრიალებენ (იგორებენ) მორები? მოკლედ აღწერეთ პროცესი.	0.3 pt.

ახლა გადავიდეთ ოთხბურთიანი პირამიდის ამოცანაზე, რაც პირველი ნახატის მარჯვენა გრაფზეა წარმოდგენილი. გავარკვიოთ წინა პუნქტებში დასმული კითხვების ანალოგიური საკითხები:

A.4	ჩათვალეთ, რომ ზედაპირს და ბურთებს შორის ერთის მხრივ და ბურთებს შორის, მეორე მხრივ, ხახუნის კოეფიციენტები განსხვავებულია. გამოითვალეთ ამ ხახუნის კოეფიციენტების ის ზღვრული მნიშვნელობები, როცა ოთხბურთიანი პირამიდული სისტემა არ იშლება.	6 pt.

A.5	ახლა ჩათვალეთ, რომ ხახუნის კოეფიციენტები ბურთებსა და ზედაპირს და ასევე ბურთებს შორის ერთი და იგივეა. იპოვეთ ამ კოეფიციენტის ის ზღვრული მნიშვნელობა, როცა ბურთების პირამიდული სისტემა არ იშლება.	0.5 pt.

A.6	როდესაც ხახუნის კოეფიციენტი წინა პუნქტში ნაპოვნ მნიშვნელობაზე ცოტათი ნაკლებია, ქვედა ბურთები ისრიალებენ თუ გაგორდებიან სადგამის მიმართ? მოკლედ აღწერეთ პროცესი.	0.5 pt.

ამოცანა 2

იზინგის მოდელი: ფაზური გადასვლები გასაშუალებული ველის მიახლოებაში (10 ქულა)

ამ ამოცანაში ჩვენი მიზანია გამოვითვალოთ მოუწესრიგებელიდან მოწესრიგებულ მდგომარეობაში გადასვლის კრიტიკული ტემპერატურა და დამაგნიტებულობის მიმართულების ცვლილებისთვის საჭირო კრიტიკული მაგნიტური ველები ორგანზომილებიან იზინგის მოდელში.

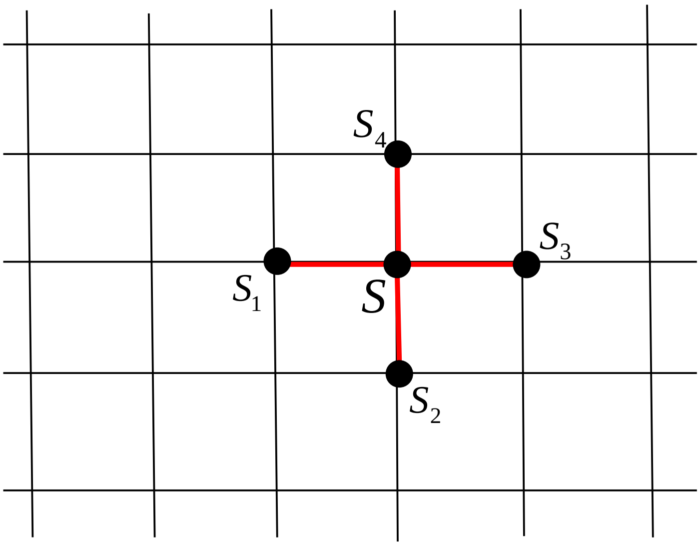
__შენიშვნა: ამ ამოცანაში ყველა სიდიდე უგანზომილებოდ შეგიძლიათ განიხილოთ.__

ამოცანის ისტორია და ზოგადი აღწერა

ამ მოდელს სახელი ეწოდა გერმანელი ფიზიკოსის ერნსტ იზინგის (Ernst Ising) საპატივსაცემოდ, რომელმაც პირველად 1925 წელს იპოვა ერთგანზომილებიანი დისკრეტული სპინური მოდელის ანალიზური ზუსტი ამოხსნები და გამოითვალა მისი თერმოდინამიკური პარამეტრები. მან აჩვენა, რომ ერთ განზომილებაში (სპინური ჯაჭვის შემთხვევა) ფაზური გადასვლა ნულოვანი დამაგნიტებულობიდან ფერომაგნიტურ მდგომარეობაში არ ხდებოდა. მოგვიანებით ამერიკელმა ფიზიკოსმა ლარს ონსაგერმა (Lars Onsager) 1940 წელს განიხილა იგივე მოდელი ორ განზომილებაში და აჩვენა დაბალ ტემპერატურებზე ფერომაგნიტური მოწესრიგებულობის გაჩენის შესაძლებლობა. ამოცანის ზუსტად ამოხსნას რთული მათემატიკური აპარატი სჭირდება და არაა ამ შესარჩევი ტურის განსახილველი თემა. აქ ჩვენ შევეცდებით გასაშუალებული ველის ფორმალიზმიდან გამომდინარე ვიპოვოთ ფაზური გადასვლების მიახლოებითი ხარისხობრივი სურათი, რომელიც არც თუ ისე შორსაა ზუსტი გამოთვლებიდან მიღებულ შედეგებთან შედარებით.

იზინგის სპინი გარე მაგნიტურ ველში

ამოცანაში განიხილება ნახატზე მოცემული ორგანზომილებიანი მესერი. მესერის კვანძებში მოთავსებულია სპინები, რომლებსაც მხოლოდ ორი მნიშვნელობის მიღება შეუძლიათ +1 და -1. რომელიმე კვანძში მოთავსებულ S სპინზე მოქმედებს გარე მუდმივი მაგნიტური ველი H_0 და ასევე მოქმედებს მისი უახლოესი მეზობელი სპინების S_1, S_2, S_3 და S_4 მიერ შექმნილი მაგნიტური ველები. დავიწყოთ უმარტივესი შემთხვევიდან, კერძოდ, განვიხილოთ შემთხვევა, როცა იზინგის სპინ S-ზე მხოლოდ გარე H_0 მაგნიტური ველი მოქმედებს. მაშინ ამ ველში სპინის ენერგია იქნება $E=-H_0S$. იმის გათვალისწინებით, რომ სპინს ორი მდგომარეობა აქვს, მაგნიტური ველის გასწვრივ $S^{\uparrow}=+1$ და მაგნიტური ველის საწინააღმდეგოდ $S^{\downarrow}=-1$, აქედან გამოდის, რომ სპინის ენერგია $S^{\uparrow}$ მდგომარეობაში იქნება $E^{\uparrow}=-H_0$, ხოლო $S^{\downarrow}$ მდგომარეობაში ენერგია იქნება $E^{\downarrow}=H_0$. ესე იგი სპინის ენერგია, როცა ის ველის გასწვრივაა, ნაკლებია, ვიდრე მაშინ როცა მისი მიმართულება მაგნიტური ველის საწინააღმდეგოდაა, რაც შეესაბამება რეალობას, რომ ველის გასწვრივ მაგნიტური მომენტის მდგომარეობა ენერგეტიკულად ყველაზე მომგებიანია. ახლა უნდა შემოვიყვანოთ მაგნიტური სპინების სტატისტიკური განაწილებების ცნება, ანუ მაგნიტურ ველში მოცემულ ტემპერატურაზე სპინების რა ნაწილი იქნება



მიმართული მაგნიტური ველის გასწვრივ და რა ნაწილი მის საწინააღმდეგოდ. ამას კი გვაძლევს ბოლცმან-გიბსის განაწილება, ანუ სპინის რაიმე მდგომარეობის რეალიზების ალბათობა პროპორციულია სიდიდის $e^{-E/T}$. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ალბათობა იმისა, რომ სპინი მაგნიტური ველის მიმართულებით იქნება მიმართული (ანუ რეალიზდება მდგომარეობა $S^{\uparrow}=+1$) არის:

$$P^{\uparrow}\sim e^{-E^{\uparrow}/T}=e^{H_0/T}$$

ხოლო ალბათობა იმისა, რომ სპინი მაგნიტური ველის საწინააღმდეგოდ იყოს მიმართული (ანუ რეალიზდება მდგომარეობა $S^{\downarrow}=-1$), პროპორციულია:

$$P^{\downarrow}\sim e^{-H_0/T}$$

პირველი დავალებაც ამ ალბათობების გამოსახულებების დაზუსტებას ეხება.

ნაწილი A. სტატისტიკური ალბათობები და საშუალო სიდიდეები (1 ქულა)

A.1	იპოვეთ პროპორციულობის კოეფიციენტის A მნიშვნელობა ბოლცმან გიბსის განაწილებაში $P=Ae^{-E/T}$. გაითვალისწინეთ, რომ ყველა განსხვავებული მდგომარეობის ალბათობების ჯამი 1 -ის ტოლი უნდა იყოს.	0.5 pt.

ნებისმიერი სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა განიმარტება როგორც ამ სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებისა და შესაბამისი ალბათობების ნამრავლების ჯამი. მაგალითად სპინის საშუალო მნიშვნელობა მაგნიტურ ველში, რასაც დამაგნიტებულობა ეწოდება და m -ით აღინიშნება, გამოითვლება შემდეგნაირად: $m\equiv\langle S\rangle=S^{\uparrow}P^{\uparrow}+S^{\downarrow}P^{\downarrow}$

A.2	გამოითვალეთ ამ საშუალო სიდიდის დამოკიდებულება მაგნიტურ ველზე H_0-ზე და ტემპერატურა T -ზე. H_0 ცვალეთ -5 -დან 5 -მდე. დახაზეთ m -ის H_0 -ზე დამოკიდებულების მიახლოებითი გრაფიკი, თუ $T=1$. დახაზეთ m -ის H_0 -ზე დამოკიდებულების მიახლოებითი გრაფიკი, თუ $T\to 0$. დახაზეთ m -ის H_0 -ზე დამოკიდებულების მიახლოებითი გრაფიკი, თუ $T\to\infty$.	0.5 pt.

მინიშნება: წინა დავალებაში და შემდეგშიც მოხერხებულია ჰიპერბოლური სინუსის $\sinh(x)$, კოსინუსის $\cosh(x)$ და ტანგენსის $\tanh(x)$ შემოტანა, რომლებიც განიმარტებიან შემდეგნაირად:

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2};\qquad \cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2};\qquad \tanh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

ამ განმარტებებიდან გამომდინარეობს მათი წარმოებულების მნიშვნელობებიც:

$$[\sinh(x)]'=\cosh(x);\qquad [\cosh(x)]'=\sinh(x);\qquad [\tanh(x)]'=\frac{1}{[\cosh(x)]^2}$$

ნაწილი B. გასაშუალებული ველის მიახლოება, კურიე-ვეისის განტოლების გამოყვანა (4 ქულა)

ახლა გავითვალისწინოთ სხვა სპინების გავლენა კვადრატულ მესერში მოთავსებულ სპინზე. იგულისხმება, რომ სპინი გარე მაგნიტური ველის გარდა გრძნობს მხოლოდ მისი უახლოესი მეზობლების მიერ შექმნილ მაგნიტურ ველს და ეს ველი ტოლია მეზობელი სპინის მნიშვნელობის ნამრავლისა ურთიერთქმედების J კონსტანტაზე, ანუ სპინზე მოქმედი სრული ველი ტოლია $H=H_0+J\sum_n S_n$, სადაც აჯამვა ხორციელდება მხოლოდ უახლოესი მეზობელი სპინებით.

გასაშუალებული ველის მიახლოება მდგომარეობს იმაში, რომ ამ უახლოესი მეზობლების სპინების მნიშვნელობები ყველა შევცვალოთ სპინის საშუალო მნიშვნელობით m, ანუ სრული მაგნიტური

ველისთვის გვაქვს გამოსახულება: $H = H_0 + \alpha m$.

B.1	გამოთვალეთ α კოეფიციენტი	0.5 pt.

სპინის ენერგიისთვის კი გვექნება $E = -HS$.

B.2	წინა ნაწილთან ანალოგიით გამოითვალეთ სპინის საშუალო მნიშვნელობა $m \equiv \langle S \rangle$ და ჩაწერეთ განტოლება m-სთვის. ეს არის კურიე-ვეისის განტოლება.	1.5 pt.

ჯერ სიმარტივისთვის დავიწყოთ ნულოვანი გარე ველის შემთხვევით $H_0 = 0$. ეს გამარტივებული განტოლება ყოველთვის ხასიათდება ტრივიალური ამონახსნით $m = 0$. მაგრამ ამ ამოხსნის გარდა კიდევ შესაძლებელია სხვა ფესვების არსებობაც დაბალ ტემპერატურებზე.

B.3	იპოვეთ ტემპერატურის ის მნიშვნელობა T_C როცა კურიე-ვეისის განტოლებას $H_0 = 0$ შემთხვევაში უჩნდება სამი ამოხსნა.	2 pt.

მითითება: კურიე-ვეისის განტოლება შეიძლება ამოიხსნას გრაფიკული მეთოდით, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში: თუ გვაქვს განტოლება $x = f(x)$, ვაგებთ ერთ გრაფიკზე $y = x$ და $y = f(x)$ ფუნქციებს და ვპოულობთ ამ წირების გადაკვეთის წერტილებს. ეს წერტილები იქნებაა $x = f(x)$ განტოლების ამონახსნები.

ტემპერატურის მნიშვნელობას T_C, როდესაც კურიე-ვეისის განტოლებას სამი ამონახსნი უჩნდება, კრიტიკულ ტემპერატურას უწოდებენ და ამ ტემპერატურაზე ხდება დაუმაგნიტებელი მდგომარეობიდან ფერომაგნიტურ მდგომარეობაში გადასვლა.

ნაწილი C. არანულოვანი გარე ველის შემთხვევა და ჰისტერეზისის მარყუჟი (5 ქულა)

C.1	განვიხილოთ ახლა ძალიან დაბალი ტემპერატურების შემთხვევა $T \to 0$. როგორც ამოცანის წინა პუნქტებიდანაა ცხადი, ასეთ დაბალ ტემპერატურებზე ყოველთვის სამი ამოხსნა გვაქვს, თუ $H_0 = 0$. თუ დავიწყებთ გარე ველის გაზრდას, მაშინ ველის რაღაც H_0^C მნიშვნელობაზე ისევ ერთი ამონახსნი გვექნება. იპოვეთ გარე მაგნიტური ველის ეს მნიშვნელობა. **მინიშნება: ამ ამონახსნის პოვნაც ადვილია გრაფიკული მეთოდის გამოყენებით.**	2 pt.

იზინგის მოდელში ნაჩვენებია, რომ თუ $T \to 0$ და კურიე-ვეისის განტოლებას სამი ამონახსნი აქვს, მაშინ ზრდის მიხედვით დალაგებისას შუა ამონახსნი ყოველთვის არამდგრადია. ამრიგად ფიზიკურად განხორციელებადია მხოლოდ ორი მდგრადი ამონახსნი, რომლებიც სხვადასხვა მიმართულების ფერომაგნიტურ წესრიგს ახასიათებს.

C.2	დახაზეთ ჰისტერეზისის მარყუჟი (m დამაგნიტებულობის დამოკიდებულება გარე მაგნიტურ H_0 ველზე) $T \to 0$ შემთხვევაში. დაიწყეთ დიდი უარყოფითი გარე ველებიდან, როცა ერთადერთი ამონახსნი არსებობს $m < 0$. გაზარდეთ შემდეგ H_0-ის მნიშვნელობა და მიახლოებით იანგარიშეთ დამაგნიტებულობა m, მანამ, სანამ H_0 დიდ დადებით მნიშვნელობებს არ მიაღწევს, რომლებისთვისაც ისევ მხოლოდ ერთი ამონახსნი გვაქვს $m > 0$. ამის შემდეგ შეამცირეთ H_0 საწყის უარყოფით მნიშვნელობამდე. დახაზეთ m-ის H_0-ზე დამოკიდებულების შესაბამისი გრაფიკი.	3 pt.

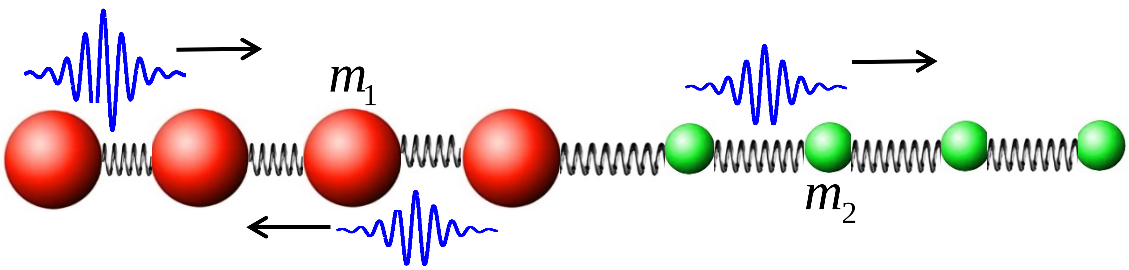
ამოცანა 3

ფრენელის ფორმულები ოსცილატორების ჯაჭვში (10 ქულა)

შესავალი

ფრენელის ფორმულები ეხება ამ ამოცანაში განხილულისგან აბსოლუტურად განსხვავებულ ფიზიკურ შემთხვევას. ფრანგმა ფიზიკოსმა ავგუსტინ ფრენელმა (Augustin-Jean Fresnel) ეს ცნობილი თანაფარდობები გამოიყვანა ოპტიკური სხივის დაცემისთვის სხვადასხვა გარემოს გამყოფ საზღვარზე. კერძოდ, თუ ცნობილია რაიმე გამყოფ ზედაპირზე დაცემული სინათლის ტალღის ამპლიტუდა, მაშინ ფრენელის ფორმულებით ჩვენ შეგვიძლია ვიანგარიშოთ არეკვლილი და გარდატეხილი სინათლის სხივების ამპლიტუდები. ყველაზე მარტივი ფორმა ამ თანაფარდობებს აქვთ გამყოფ ზედაპირზე მართობული დაცემის დროს, როცა არეკვლილი და დაცემული სხივების ამპლიტუდების შეფარდება ტოლია $(\eta_1-\eta_2)/(\eta_1+\eta_2)$, სადაც η_1 და η_2 პირველი და მეორე გარემოს გარდატეხის მაჩვენებლებია.

ამ თანაფარდობების გამოყვანის დროს ფრენელმა გამოიყენა ის გარემოება, რომ სინათლე ელექტრომაგნიტური ტალღაა, რომლის ელექტრული და მაგნიტური ველის კომპონენტები (ერთის მხრივ დაცემული და არეკვლილი ტალღების სუპერპოზიცია, ხოლო მეორეს მხრივ გარდატეხილი ტალღა) უწყვეტად უნდა გადაებას ორი გარემოს გამყოფ საზღვარზე. ჩვენს ამოცანაში ანალოგიურად გამოვიყენებთ აკუსტიკური ტალღის უწყვეტობის პირობას ორი განსხვავებული ჯაჭვის გადაბმის ადგილზე და ამ პირობაზე დაყრდნობით ვიანგარიშებთ დაცემული ტალღის ამპლიტუდის რა ნაწილი აირეკლება გამყოფი საზღვრიდან და რა ნაწილი გადავა სხვა ჯაჭვში.



ნახატი 1. ოსცილატორების გადაბმული ორჯაჭვოვანი სისტემა.

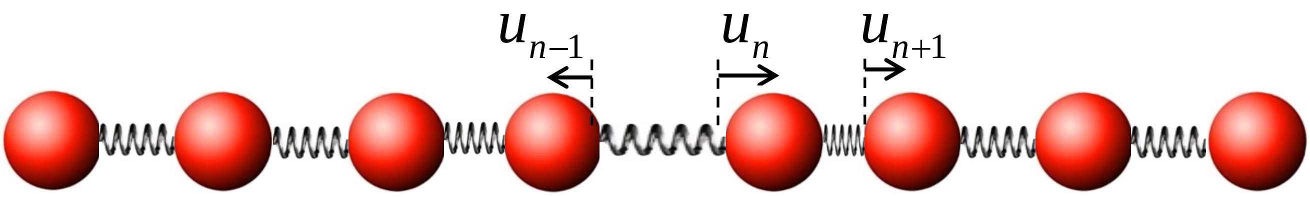
ამოცანის დასმა

მოცემულია ორი სხვადასხვა მასებით შედგენილი ოსცილატორული ჯაჭვი (იხილეთ ნახატი 1). მარცხენა ჯაჭვში ყველა ოსცილატორის მასები m_1-ის ტოლია, ხოლო მარჯვენაში m_2-ის. ამავე დროს ზამბარების სიხისტეები ორივე ჯაჭში და გადაბმის ადგილზე ერთნაირია და k-ს ტოლია. ყველა ბურთულას შეუძლია მხოლოდ ჰორიზონტალური მიმართულებით მოძრაობა. მარცხნიდან ვრცელდება რხევითი ტალღა ω სიხშირითა და A ამპლიტუდით . გამოსათვლელია მარცხენა და მარჯვენა ჯაჭვების გადაბმის ადგილიდან არეკვლილი ტალღის ამპლიტუდა და მარჯვენა ჯაჭვში გადასული ტალღის ამპლიტუდები. იგულისხმება, რომ მარცხნივ და მარჯვნივ ორივე ჯაჭვი უსასრულოდ გრძელია.

ნაწილი A. ერთგვაროვანი ოსცილატორული ჯაჭვი (3 ქულა)

სანამ უშუალოდ ფრენელის თანაფარდობების განხილვაზე გადავალთ, ჯერ გამოვიკვლიოთ ერთგვაროვან ჯაჭვში ბურთულების მოძრაობის განტოლებები და ტალღების დისპერსიული თანაფარდობა (სიხშირის დამოკიდებულება ტალღურ რიცხვზე). ნახატ 2-ზე წარმოდგენილია ერთგვაროვანი ოსცილატორული ჯაჭვის სქემატური სურათი, ბურთულების მასები m-ის ტოლია, ხოლ ზამბარების სიხისტეებია k . ამავე დროს იგულისხმება, რომ ძალაშია ჰუკის კანონი ზამბარების წაგრძელების დროს $F=-kx$.

A.1	აღნიშნეთ n-ური ბურთულას გადახრა წონასწორული მდგომარეობიდან u_n-ით, ხოლო $n-1$ და $n+1$ ბურთულების გადახრები შესაბამისად u_{n-1} და u_{n+1}-ით. ჩაწერეთ n-ურ ბურთულაზე მარჯვნიდან და მარცხნიდან მოქმედი ძალები და მათი ტოლქმედი. შემდეგ ჩაწერეთ ნიუტონის მეორე კანონი n-ური ბურთულისთვის რაც იქნება მისი მოძრაობის განტოლება.	**1 pt.**



ნახატი 2: ერთგვაროვანი ოსცილატორული ჯაჭვის სქემატური ნახაზი.

A.2	დისპერიული თანაფარდობის მისაღებად n -ური ბურთულის მოძრაობის განტოლებაში ჩავსვათ ტალღური გამოსახულება $u_n = A\cos(\omega t - pn)$. შედეგად უნდა მივიღოთ ω ტალღის სიხშირის დამოკიდებულება p ტალღურ რიცხვზე და უნდა დაამტკიცოთ, რომ ამ თანაფარდობას აქვს სახე: $\omega^2 = 2\frac{k}{m}\left[1-\cos(p)\right]$	2 pt.

ნაწილი B. ფრენელის ფორმულების გამოყვანა (7 ქულა)

ვთქვათ A ამპლიტუდის ტალღა მოძრაობს და ეცემა მარცხნიდან მარჯვნივ, ესე იგი მისი ფორმა იქნება $A\cos(\omega t - p_1 n)$, უნდა გავითვალისწინოთ, რომ გადაბმის პირობებიდან ადვილი საჩვენებელია, რომ დაცემული არეკვლილი და გასული ტალღის სიხშირეები ტოლია, ჩათვალეთ ეს დებულება დამტკიცებულად. მაშინ არეკვლილ ტალღას ექნება ფორმა $B\cos(\omega t + p_1 n + \alpha)$, ხოლო მარჯვენა ჯაჭვში გადასული ტალღა იქნება $D\cos(\omega t + p_2 n + \beta)$, სადაც α და β ფაზური მუდმივებია. შედეგად, მარცხნივ გვექნება დაცემული და ჯაჭვების საზღვრიდან არეკვლილი ტალღა, ხოლო მარჯვენა მხარეს კი მხოლოდ ჯაჭვების საზღვარში გასული ტალღა. ამასთან ბუნებრივია, რომ მარცხენა და მარჯვენა ჯაჭვში შესაბამისად სრულდება შემდეგი დისპერსიული თანაფარდობები: $\omega^2 = 2\left(k/m_1\right)\left[1-\cos(p_1)\right]$ და $\omega^2 = 2\left(k/m_2\right)\left[1-\cos(p_2)\right]$.

შენიშვნა: დაცემული, არეკვლილი და გადასული ტალღები შეგვიძლია კომპლექსური რიცხვების ფორმალიზმშიც წარმოვადგინოთ როგორც $Ae^{i(\omega t - p_1 n)}$, $Be^{i(\omega t + p_1 n)}$ და $De^{i(\omega t - p_2 n)}$, სადაც A , B და D ამჯერად კომპლექსური ამპლიტუდებია. ასეთ წარმოდგენაში გამოთვლები საგრძნობლად მარტივდება.

B.1	გადანომრეთ მარცხენა და მარჯვენა ჯაჭვი ისე, რომ საზღვრისპირა დიდ ბურთულას ჰქონდეს ნომერი 0, ხოლო საზღვრისპირა პატარა ბურთულას კი ნომერი 1. გადავაბათ მარცხნივ და მარჯვნივ არსებული ტალღების გამოსახულებები წერტილებში $n=0$ და $n=1$. დაწერეთ ეს განტოლებები.	2 pt.

განტოლებების გასამარტივებლად და დროითი დამოკიდებულების გამოსარიცხად უნდა გავითვალისწინოთ, რომ თუ გვაქვს ტოლობა $Q_1\sin(\omega t) + Q_2\cos(\omega t) = 0$ (სადაც Q_1 და Q_2 დროზე დამოუკიდებელი ნებისმიერი ცვლადების კომბინაცია შეიძლება იყოს), იმის მოთხოვნიდან რომ ტოლობა კმაყოფილდებოდეს ნებისმიერი დროის მომენტისთვის, ამისთვის აუცილებელია პირობების $Q_1 = Q_2 = 0$ დაკმაყოფილება.

B.2	მიღებული განტოლებებიდან გამოითვალეთ თანაფარდობები B/A და D/A როგორც p_1 და p_2-ის ფუნქცია. ეს იქნება ფრენელის ფორმულების საბოლოო სახე ოსცილატორების გადაბმული ჯაჭვებისთვის.	5 pt.

შენიშვნა: კომპლექსურ წარმოდგენაში საკმარისი იქნება მოდულების გამოთვლა: $\left|B/A\right|$ და $\left|D/A\right|$.