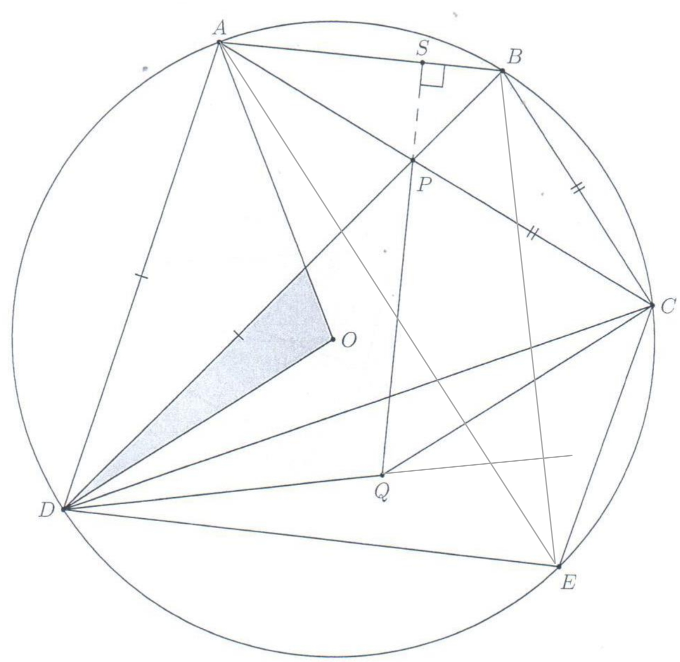
ამოცანა 1. ვთქვათ $ABCD$ ოთხკუთხედი ჩახაზულია ω წრეწირში. AC და BD დიაგონალები იკვეთება P წერტილში და $AD = DP$. ვთქვათ S არის P წერტილიდან AB წრფეზე დაშვებული მართობის ფუძე. Q წერტილი აღებულია SP წრფეზე ისე, რომ PQ მონაკვეთის სიგრძე უდრის ω წრეწირის რადიუსს, ამასთან P წერტილი მდებარეობს S და Q წერტილებს შორის. ვთქვათ A წერტილიდან CQ წრფისადმი გავლებული პერპენდიკულარი და B წერტილიდან DQ წრფისადმი გავლებული პერპენდიკულარი იკვეთება E წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ E წერტილი მდებარეობს ω წრეწირზე.

ამოხსნა



შევნიშნოთ, რომ $\angle DAP = \angle DPA = \angle CPB$ და $\angle ADP = \angle ACB$, ამიტომ $\angle CPB = \angle CBP$, ე. ი. $CP = CB$.

ვთქვათ O არის ω წრეწირის ცენტრი, ხოლო E არის P წერტილის სიმეტრიული CD წრფის მიმართ. ვინაიდან

$$\angle CED = \angle DPC = 180^\circ - \angle CPB = 180^\circ - \angle PBC = 180^\circ - \angle DBC,$$

ამიტომ E წერტილი მდებარეობს ω წრეწირზე.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ BE წრფე პერპენდიკულარულია DQ წრფის.

გვაქვს $AO = PQ,\ AD = DP$ და $\angle DAO = 90^\circ - \angle ABD = \angle BPS = \angle DPQ$. ამიტომ AOD და PQD სამკუთხედები ტოლია. მაშინ ვინაიდან $DA = DP = DE$, გვექნება

$$\angle QDB + \angle DBE = \angle ODA + \angle DAE = \angle ODA + \angle AED = 90^\circ.$$

ამრიგად BE წრფე პერპენდიკულარულია DQ წრფის. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ AE წრფე პერპენდიკულარულია CQ წრფის, ე. ი. A წერტილიდან CQ წრფისადმი

გავლებული პერპენდიკულარი და B წერტილიდან DQ წრფისადმი გავლებული პერპენდიკულარი იკვეთება E წერტილში. დამტკიცება დასრულებულია.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ $CP = CB$;

ბ) განიხილა E წერტილი, როგორც P წერტილის სიმეტრიული CD წრფის მიმართ;

გ) დაადგინა, რომ P წერტილის სიმეტრიული CD წრფის მიმართ მდებარეობს ω წრეწირზე;

დ) დაადგინა, რომ $\angle DAO = \angle DPQ$;

ე) დაადგინა, რომ AOD და PQD სამკუთხედები ტოლია;

ვ) დაადგინა, რომ BE წრფე პერპენდიკულარულია DQ წრფის;

ზ) დაასრულა დამტკიცება.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ)
3 ქ- ა) , ბ), გ)
4 ქ- ა), ბ), გ), დ)
5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 2. იპოვეთ ყველა (a, p) წყვილი, სადაც a მთელი დადებითი რიცხვია, ხოლო p მარტივი რიცხვია ისეთი, რომ $p^a + a^4$ იყოს მთელი რიცხვის კვადრატი.

ამოხსნა

ვთქვათ b არის ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი, რომ $p^a + a^4 = b^2$. მაშინ $p^a = b^2 - a^4 = (b-a^2)(b+a^2)$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $b-a^2$ და $b+a^2$ არიან p-ს ხარისხები.

ვთქვათ x არის ისეთი მთელი რიცხვი, რომ $b-a^2 = p^x$. მაშინ $b+a^2 = p^{a-x}$ და $a-x > x$. შესაბამისად გვექნება:

$$2a^2 = (b+a^2)-(b-a^2) = p^{a-x} - p^x = p^x(p^{a-2x} - 1).$$

განვიხილოთ შემთხვევები: $p = 2$ და $p \neq 2$. ქვემოთ გამოვიყენებთ აღნიშვნას $v_p(m) = p^k$, სადაც k ისეთი უდიდესი მთელი რიცხვია, რომ p^k ყოფდეს m-ს.

1) ვთქვათ $p = 2$. მაშინ, იმის გამო, რომ უსგ $(2, 2^{a-2x} - 1) = 1$, გვექნება

$$a^2 = 2^{x-1}(2^{a-2x} - 1) = 2^{2v_2(a)}(2^{a-2x} - 1),$$

საიდანაც ჩანს, რომ $2^{a-2x} - 1$ არის სრული კვადრატი.

თუ $v_2(a) > 0$, მაშინ 2^{a-2x} არის ასევე სრული კვადრატი, ამიტომ $2^{a-2x} - 1 = 0$ და $a = 0$, რაც წინააღმდეგობაა.

თუ $v_2(a) = 0$, მაშინ $x = 1$ და $a^2 = 2^{a-2} - 1$. თუ $a \geq 4$ მაშინ მიღებული ტოლობის მარჯვენა მხარე სადარია 3-ის მოდულით 4, ამიტომ შეუძლებელია იყოს სრული კვადრატი. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $a = 1,\ a = 2,\ a = 3$ შემთხვევები ასევე არ აკმაყოფილებს მიღებულ ტოლობას.

2) ვთქვათ $p \neq 2$. ამ შემთხვევაში გვაქვს $2v_p(a) = x$. ვთქვათ $m = v_p(a)$. მაშინ გვექნება $a^2 = p^{2m}n^2$ რაღაც $n \geq 1$ მთელი რიცხვისთვის, ამიტომ $2n^2 = p^{a-2x} - 1 = p^{p^m n - 4m} - 1$.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

ა) ვთქვათ $p \geq 5$. ინდუქციით ადვილად მტკიცდება, რომ $p^m \geq 5^m > 4m$ ყველა მთელი დადებითი m-ისთვის. მაშინ გვექნება $2n^2 + 1 = p^{p^m n - 4m} > p^{p^m n - p^m} \geq 5^{5^m(n-1)} \geq 5^{n-1}$. მეორე მხრივ ინდუქციით ადვილად ვაჩვენებთ, რომ $5^{n-1} > 2n^2 + 1$ როდესაც $n \geq 3$. დარჩა

განსახილველი $n=1$ და $n=2$ შემთხვევები. ამ დროს $p=3$, რაც ეწინააღმდეგება $p\geq 5$ დაშვებას.

ბ) ვთქვათ $p=3$. გვაქვს

$$2n^2+1=3^{3^m n-4m}.$$

თუ $m\geq 2$, მაშინ ინდუქციით ადვილად მტკიცდება, რომ $3^m>4m$, ამიტომ გვექნება $2n^2+1=3^{3^m n-4m}>3^{3^m n-3^m}=3^{3^m(n-1)}\geq 3^{9(n-1)}$. ინდუქციით ვაჩვენებთ, რომ $3^{9(n-1)}>2n^2+1$ როდესაც $n\geq 2$. ამიტომ დარჩა განსახილველი $n=1$ შემთხვევა. ამ დროს მივიღებთ $3=3^{3^m-4m}$, ე. ი. $3^m-4m=1$. ვინაიდან $3^m>4m+1$, როდესაც $m\geq 3$, ამიტომ მიღებულ ტოლობას აკმაყოფილებს მხოლოდ $m=2$. ამრიგად $a=3^m n=3^2\cdot 1=9$.

თუ $m=1$, მაშინ $2n^2+1=3^{3n-4}$. ინდუქციით ადვილად მტკიცდება, რომ $3^{3n-4}>2n^2+1$, როდესაც $n\geq 3$. შემოწმებით ვადგენთ, რომ $n=1$ არ აკმაყოფილებს, ხოლო თუ $n=2$, მაშინ $a=3^m n=3^1\cdot 2=6$.

თუ $m=0$, მაშინ $2n^2+1=3^n$. ინდუქციით ადვილად მტკიცდება, რომ $3^n>2n^2+1$, როდესაც $n\geq 3$. შემოწმებით ვადგენთ, რომ $n=1$, მაშინ $a=3^m n=3^0\cdot 1=1$, ხოლო თუ $n=2$, მაშინ $a=3^m n=3^0\cdot 2=2$.

პასუხი: $(1,\ 3)$, $(2,\ 3)$, $(6,\ 3)$, $(9,\ 3)$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) მიიღო $2a^2=p^x(p^{a-2x}-1)$;

ბ) განიხილა $p=2$ შემთხვევა და დაადგინა, რომ ამონახსნი არ არსებობს;

გ) განიხილა $p\geq 5$ შემთხვევა და დაადგინა, რომ ამონახსნი არ არსებობს;

დ) განიხილა $p=3$ შემთხვევა და მიიღო $2n^2+1=3^{3^m n-4m}$;

ე) $2n^2+1=3^{3^m n-4m}$ განტოლებაში განიხილა $m\geq 2$ შემთხვევა და მიიღო $(9,\ 3)$ ამონახნი;

ვ) $2n^2+1=3^{3^m n-4m}$ განტოლებაში განიხილა $m=1$ შემთხვევა და მიიღო $(6,\ 3)$ ამონახნი;

ზ) $2n^2+1=3^{3^m n-4m}$ განტოლებაში განიხილა $m=0$ შემთხვევა და მიიღო $(1,\ 3)$, $(2,\ 3)$, ამონახნები;

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ) ან ა) , გ) ან ა), დ)
3 ქ- ა) და ბ), გ), დ) პუნქტებიდან რომელიმე ორი პუნქტი
4 ქ- ა), ბ), გ), დ)
5 ქ- ა), ბ), გ), დ) და ე) , ვ), ზ) პუნქტებიდან რომელიმე ერთი პუნქტი
6 ქ- ა), ბ), გ), დ), და ე) , ვ), ზ) პუნქტებიდან რომელიმე ორი პუნქტი
7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 3. განსაზღვრეთ მთელ დადებით რიცხვთა $a_1, a_2, \dots, a_L$ მიმდევრობის მაქსიმალური სიგრძე L, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

(i) მიმდევრობის ყოველი წევრი ნაკლებია ან ტოლი 2^{2024}-ზე;
(ii) ყოველი i და j სთვის, სადაც $1 \leq i < j \leq L$ და ყოველი ნიშნებისთვის $s_i, s_{i+1}, \dots, s_j \in \{-1,1\}$, გვაქვს $a_i s_i + a_{i+1} s_{i+1} + \cdots + a_j s_j \neq 0$.

ამოხსნა

დავამტკიცოთ უფრო ზოგადი დებულება, რომ თუ ამოცანის პირობაში 2^{2024}-ს შევცლით 2^k-თი, მაშინ ამოცანის პასუხი იქნება $2^{k+1} - 1$. ვთქვათ $n = 2^k$.

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ არსებობს დადებით მთელ რიცხვთა $L = 2n - 1$ სიგრძის მიმდევრობა, რომელიც ამოცანის პირობებს აკმაყოფილებს. ვთქვათ m მთელი დადებითი რიცხვია. აღვნიშნოთ $v_2(m)$-ით უდიდესი არაუარყოფითი რიცხვი v ისეთი, რომ 2^v ყოფს m-ს. განვსაზღვროთ მიმდევრობა $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}$, შემდეგნაირად $a_i = 2^{k - v_2(i)}$, $1 \leq i \leq 2n -$

1. რადგანაც $0 \leq v_2(i) \leq k$, ამიტომ ცხადია, რომ ამ მიმდევრობის ყველა წევრი მთელი დადებითი რიცხვია, რომელიც ნაკლებია ან ტოლი ვიდრე $n = 2^k$, ანუ სრულდება პირობა (i). მაგალითად, თუ $k = 2$, მაშინ $n = 4$ და გვექნება მიმდევრობა $4, 2, 4, 1, 4, 2, 4$.

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი i და j -თვის, სადაც $1 \leq i < j \leq 2n - 1$, მიმდევრობაში $i, i + 1, \dots, j$ გვხვდება ერთი და მხოლოდ ერთი მთელი რიცხვი m ისეთი, რომ $v_2(m) = max\,\{v_2(i), v_2(i+1), \dots, v_2(j)\}$. ეს კი ნიშნავს, რომ მიმდევრობის $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$ ყველა წევრი გარდა $a_m = 2^{k-v_2(m)}$ იყოფა $2^{k-v_2(m)+1}$. ცხადია იგივე სრულდება $a_i s_i, a_{i+1} s_{i+1}, \dots, a_j s_j$ მიმდევრობისთვისაც, სადაც $s_i, s_{i+1}, \dots, s_j$ ნებისმიერი ნიშნებია. აქედან კი ვღებულობთ, რომ $a_i s_i + a_{i+1} s_{i+1} + \cdots + a_j s_j \neq 0$, ანუ პირობა (ii)-იც სრულდება.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ თუ $L \geq 2n$ მაშინ არ არსებობს მთელ რიცხვთა $a_1, a_2, \dots, a_L$ მიმდევრობა ისეთი, რომ ყოველი i-თვის, $a_i \leq n$ და სრულდება (ii) პირობა. განვსაზღვროთ $b_1, b_2, \dots, b_N$ მიმდევრობის კერძო ჯამები $S_1, S_2, \dots, S_N$ შემდეგნაირად: $S_i = b_1 + \cdots + b_i, 1 \leq i \leq N$. ვინაიდან $1 \leq a_i \leq n$, ამიტომ ნიშნები შეგვიძლია შევარჩიოთ ისე, რომ მიღებული მიმდევრობის ყოველი კერძო ჯამი მოთავსებული იყოს $[-n+1, n]$ სეგმენტში. მართლაც, $a_1, \dots, a_i$ წევრებისთვის ავიღოთ პლუს ნიშნები მანდამდე, სანამ კერძო ჯამი არ გასცდება n -ს, ანუ $s_1 = \cdots = s_i = 1$ თუ $a_1 + \cdots + a_i \leq n$ და $a_1 + \cdots + a_i + a_{i+1} > n$. შემდეგი წევრებისთვის $a_{i+1}, \dots, a_j$ -თვის ავიღებთ მინუს ნიშნებს იქამდე ვიდრე პირველი კერძო ჯამი არ გახდება არადადებითი. ანუ j არის პირველი ინდექსი, როცა $a_1 + \cdots + a_i - a_{i+1} - \cdots - a_j \leq 0$. შემდეგი წევრებისთვის ისევ ავიღებთ პლუს ნიშნებს მანამდე, სანამ კერძო ჯამი არ გასცდება n-ს, შემდეგ მინუს ნიშნებს და ა. შ.. ცხადია ასეთნაირად შერჩეული ნიშნები მოგვცემს იმის გარანტიას, რომ მიღებული $a_1 s_1, a_2 s_2, \dots, a_L s_L$ მიმდევრობის ყოველი კერძო ჯამი მოთავსებული იქნება $[-n+1, n]$ სეგმენტში. ცხადია სულ გვაქვს $L \geq 2n$ ცალი კერძო ჯამი. თუ რომელიმე მათგანი ნულია მაშინ ამ კერძო ჯამისთვის (ii) პირობა არ სრულდება. თუ არცერთი ნული არაა, მაშინ რადგანაც $[-n+1, n] \backslash \{0\}$ სიმრავლეში $2n - 1$ ცალი მთელი რიცხვია, ხოლო კერძო ჯამების რაოდენობა მეტია ან ტოლი $2n$-ზე, ამიტომ არსებობს ორი კერძო ჯამი S_p და S_q , $p < q$, რომლებიც ემთხვევა ერთმანეთს. ეს კი ნიშნავს, რომ $S_q - S_p = a_{p+1} s_{p+1} + \cdots + a_q s_q = 0$. ამრიგად ამ შემთხვევაშიც არსებობს მიმდევრობის ნაჭერი სადაც (ii) პირობა არ სრულდება. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

პასუხი: $L = 2^{2025} - 1$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) მთელი დადებითი რიცხვისთვის განიხილა სიდიდე $v_2(m)$ და შემოიღო მიმდევრობა $a_i = 2^{k-v_2(i)}, 1 \leq i \leq 2n - 1$;
ბ) აღნიშნა, რომ რადგანაც $0 \leq v_2(i) \leq k$, ამიტომ მიმდევრობის ყველა წევრი მთელი დადებითი რიცხვია;

გ) შენიშნა, რომ ინდექსთა ყოველი $i, i+1, \dots, j$ ნაჭრისთვის, ამ ნაჭრის მხოლოდ ერთ წევრზე მიიღწევა v_2 ფუნქციის მაქსიმუმი;
დ) დაასკვნა, რომ $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$ ყველა წევრი გარდა $a_m = 2^{k-v_2(m)}$-სა იყოფა $2^{k-v_2(m)+1}$-ზე და მიიღო შეფასება $L \geq 2n-1$;

ე) შემოიღო ნიშნები რეკურსიულად ისე, რომ ყოველი კერძო ჯამი ეკუთვნის $[-n+1, n]$ სეგმენტს;

ვ) აღნიშნა, რომ თუ რომელიმე კერძო ჯამი ნულია, მაშინ არ სრულდება პირობა (ii);
ზ) აჩვენა, რომ თუ $L \geq 2n$ და $S_i \neq 0$, როცა $1 \leq i \leq L$, მაშინ არსებობს $p < q$ ისეთი, რომ $S_q - S_p = a_{p+1}s_{p+1} + \cdots + a_q s_q = 0$ და ამრიგად მიიღო L-ის ზუსტი მნიშვნელობა.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ)
3 ქ- ა) , ბ), გ)
4 ქ- ა), ბ), გ), დ)
5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 4. ვთქვათ m და n ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვებია. $m \times n$ მართკუთხედის ფორმის ცხრილის ყოველ უჯრაზე დევს მონეტა გერბით ზემოთ. ერთი სვლა შედგება შემდეგი სამი ნაბიჯისგან:

(i). ვირჩევთ $m \times n$ ცხრილის 2×2 კვადრატს;

(ii). ვატრიალებთ არჩეული 2×2 კვადრატის მარცხენა ზედა და მარჯვენა ქვედა უჯრაში მყოფ მონეტებს;

(iii). ვატრიალებთ არჩეული 2×2 ცხრილის ზედა მარჯვენა ან ქვედა მარცხენა უჯრაში მყოფ მონეტას.
განსაზღვრეთ ყველა წყვილი (m, n) ისეთი, რომ სასრული რაოდენობა სვლის შემდეგ შესაძლებელია, რომ $m \times n$ ცხრილის ყოველ უჯრაზე მონეტა იდოს საფასურით ზემოთ.

შენიშვნა: იგულისხმება, რომ ყოველ მონეტას აქვს ორი მხარე, გერბი და საფასური. ასევე, თუ მონეტა დევს გერბით ზემოთ, ამოტრიალების შემდეგ იგი იქნება საფასურით ზემოთ და პირიქით, თუ მონეტა დევს საფასურით ზემოთ, ამოტრიალების შემდეგ იგი იქნება გერბით ზემოთ.

ამოხსნა

(i,j)- უჯრა ვუწოდოთ უჯრას, რომელიც მდებარეობს i-ური სტრიქონისა და j -იური სვეტის გადაკვეთაზე, ამასთან სტრიქონები გადანომრილია ზევიდან ქვევით, ხოლო სვეტები მარცხნიდან მარჯვნივ. ყოველი $1 \le i \le m-1$ და $1 \le j \le n-1$ -თვის, $A(i,j)$ აღნიშნავდეს სვლას, რომელიც ატრიალებს მონეტებს უჯრებზე (i,j), $(i+1,j+1)$ და $(i,j+1)$, ხოლო $B(i,j)$ აღნიშნავდეს სვლას, რომელიც ატრიალებს მონეტებს უჯრებზე (i,j), $(i+1,j+1)$ და $(i+1,j)$. ვთქვათ m და n ისეთი მთელი რიცხვებია, რომ $3|mn$. ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში შესაძლებელია სასრული რაოდენობა სვლის შემდეგ $m \times n$ ცხრილის ყოველ უჯრაზე მონეტა იდოს საფასურით ზემოთ. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $3|m$. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

ა) n ლუწია.

ამ შემთხვევაში დაფა იყოფა 3×2 ზომის მართკუთხედებად და ამრიგად თუ შევასრულებთ სვლებს $A(3k-2,2l-1)$ და $B(3k-1,2l-1)$ ყველა $1 \le k \le m/3$ და $1 \le l \le n/2$ -თვის, მივიღებთ ყველა მონეტას საფასურით ზემოთ, ანუ მონეტების სასურველ მდგომარეობას.

ბ) n კენტია.

განვიხილოთ $m \times (n-1)$ დაფა. ამ დაფაზე, ისევე როგორც წინა შემთხვევაში, მივაღწევთ იმას, რომ ყოველი მონეტა საფასურით ზემოთაა. ამრიგად $m \times n$ ცხრილის ბოლო სვეტის ყოველ უჯრაზე მონეტა გერბით ზემოთაა, ხოლო ყველა დანარჩენ უჯრაში საფასურით ზემოთ. ახლა ყოველი k-თვის, სადაც $1 \le k \le m/3$, შევასრულოთ შემდეგი სამი სვლა: $A(3k-2,n-1)$, $A(3k-1,n-1)$ და $B(3k-2,n-1)$. ამ სამი სვლის შემდეგ $(3k-2,n-1)$ და $(3k-1,n-1)$ უჯრებში მყოფი მონეტები ორჯერ ამოტრიალდება, ხოლო $(3k-2,n)$, $(3k-1,n-1)$ და $(3k,n)$ უჯრებში მხოლოდ ერთხელ. ამრიგად საბოლოოდ მივაღწევთ ყველა უჯრაში მონეტას საფასურით ზემოთ.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ პირობა $3|mn$ აუცილებელია იმისთვის, რომ სასრული რაოდენობა სვლების შემდეგ მივაღწიოთ მონეტების სასურველ მდგომარეობას.

ამისათვის თითოეულ (i,j) უჯრა დავნომროთ ნომრით, რომელიც ტოლია $i+j-2$ -ის 3-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთის.

0	1	2	0	$\cdots$
1	2	0	1	$\cdots$
2	0	1	2	$\cdots$
0	1	2	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

ვთქვათ $T(c)$ აღნიშნავს ყველა იმ მონეტათა რაოდენობას რომლებიც საფასურით ზემოთ არიან და იმყოფებიან c ნომრიან უჯრებზე. შევნიშნოთ, რომ ყოველი სვლა არ ცვლის $T(0) - T(1)$ და $T(1) - T(2)$ -ის ლუწ-კენტობას, ვინაიდან ნებისმიერი სვლა ეხება ზუსტად ერთ 0, 1 და 2 ნომრიან უჯრის მონეტებს. რადგან სვლების დასაწყისში გვაქვს $T(0) = T(1) = T(2) = 0$, ამიტომ ნებისმიერი სვლის შემდეგ

$$T(0) \equiv T(1) \equiv T(2) (mod\ 2).$$

ახლა დავითვალოთ T-ს მნიშვნელობები იმ შემთხვევაში, როცა ყველა უჯრაზე მონეტა დევს საფასურით ზემოთ.

- თუ $m \equiv n \equiv 1\ (mod\ 3)$, მაშინ $T(0) - 1 = T(1) = T(2) = \frac{mn-1}{3}$.
- თუ $m \equiv 1\ (mod\ 3)$ და $n \equiv 2\ (mod\ 3)$ ან პირიქით, თუ $m \equiv 2\ (mod\ 3)$ და $n \equiv 1\ (mod\ 3)$,მაშინ $T(0) - 1 = T(1) - 1 = T(2) = \frac{mn-2}{3}$.
- თუ $m \equiv n \equiv 2\ (mod\ 3)$, მაშინ $T(0) = T(1) - 1 = T(2) = \frac{mn-1}{3}$.
- თუ $m \equiv 0\ (mod\ 3)$ ან $n \equiv 0\ (mod\ 3)$, მაშინ $T(0) = T(1) = T(2) = \frac{mn}{3}$.
  აქედან ჩანს, რომ $T(0), T(1)$ და $T(2)$-ს აქვს ერთი და იგივე ლუწ-კენტობა მხოლოდ მაშინ, როცა $3|mn$. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

პასუხი: ყველა (m, n) წყვილი, $m, n > 1$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $3|mn$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) აჩვენა, რომ თუ $3|m$ და n ლუწია, მაშინ სასრული სვლების შემდეგ მიიღწევა მონეტათა სასურველი მდგომარეობა;
ბ) აჩვენა, რომ თუ $3|m$ და n კენტია, მაშინაც მიიღწევა მონეტათა სასურველი მდგომარეობა;
გ) შემოიღო $T(0), T(1)$ და $T(2)$ სიდიდეები და აჩვენა, რომ $T(0) - T(1)$ და $T(1) - T(2)$ -ის ლუწ-კენტობა ინვარიანტია;
დ) დათვალა $T(0), T(1)$ და $T(2)$ -ის მნიშვნელობები როცა $m \equiv n \equiv 1\ (mod\ 3)$;

ე) დათვალა $T(0), T(1)$ და $T(2)$ -ის მნიშვნელობები როცა $m \equiv 1\ (mod\ 3)$ და $n \equiv 2\ (mod\ 3)$ ან როცა $m \equiv 2\ (mod\ 3)$ და $n \equiv 1\ (mod\ 3)$;

ვ) დათვალა $T(0), T(1)$ და $T(2)$ -ის მნიშვნელობები როცა $m \equiv n \equiv 2\ (mod\ 3)$;

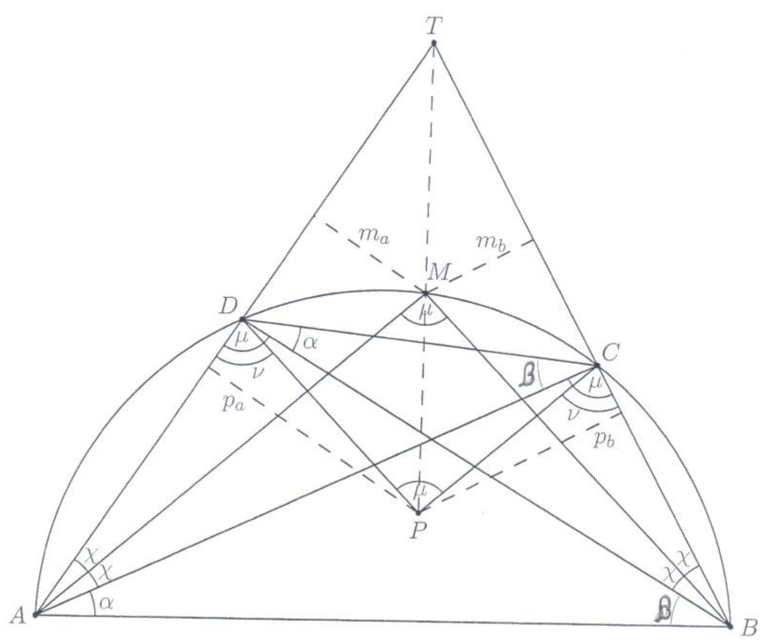
ზ) დათვალა $T(0), T(1)$ და $T(2)$ -ის მნიშვნელობები როცა $m \equiv 0\ (mod\ 3)$ ან როცა $n \equiv 0\ (mod\ 3)$ და მიიღო პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ)
3 ქ- ა) , ბ), გ)
4 ქ- ა), ბ), გ), დ)
5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 5. ვთქვათ $ABCD$ ოთხკუთხედი ჩახაზულია წრეწირში, ამასთან $\angle BAD < \angle ADC$. ვთქვათ M არის იმ CD რკალის შუაწერტილი, რომელიც არ შეიცავს A წერტილს. P წერტილი აღებულია $ABCD$ ოთხკუთხედის შიგნით ისე, რომ $\angle ADB = \angle CPD$ და $\angle ADP = \angle PCB$. დაამტკიცეთ. რომ AD, PM და BC წრფეები იკვეთება ერთ წერტილში.

ამოხსნა



ვთქვათ AD და BC წრფეები იკვეთება T წერტილში. აღვნიშნოთ p_a, $p_{b,}$ -ით P წერტილიდან შესაბამისად TA და TB წრფეებამდე მანძილები, ხოლო m_a, m_b -ით M

წერტილიდან შესაბამისად TA და TB წრფეებამდე მანძილები. ჩვენი მიზანია დავამტკიცოთ, რომ $p_a : p_b = m_a : m_b$, რაც იმას ნიშნავს, რომ T, M და P წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობს, ე. ი. AD, PM და BC წრფეები იკვეთება ერთ წერტილში.

ვთქვათ $\angle BAC = \angle BDC = \alpha,\quad \angle DBA = \angle DCA = \beta,\ \angle ADB = \angle AMB = \angle ACB = \angle CPD = \mu$, $\angle ADP = \angle PCB = \nu,\quad \angle MAD = \angle CAM = \angle MBD = \angle CBM = \chi$.

ვინაიდან $\angle ADP = \angle PCB = \nu$ და $\angle MAD = \angle CBM = \chi$, გვექნება

$$\frac{p_a}{p_b} = \frac{PD\sin\nu}{PC\sin\nu} = \frac{PD}{PC} \quad \text{და} \quad \frac{m_a}{m_b} = \frac{MA\sin\chi}{MB\sin\chi} = \frac{MA}{MB}.$$

მაშასადამე $p_a : p_b = m_a : m_b$ ტოლობა ეკვივალენტურია $PD : PC = MA : MB$ ტოლობის და ვინაიდან $\angle AMB = \angle CPD = \mu$, ეს ნიშნავს, რომ ვაჩვენოთ PDC და MAB სამკუთხედების მსგავსება.

PDC სამკუთხედში გვაქვს:

$$\angle PDC + \angle DCP = 180° - \angle CPD = 180° - \mu,$$

$$\angle PDC - \angle DCP = (\alpha + \mu - \nu) - (\beta + \mu - \nu) = \alpha - \beta.$$

MAB სამკუთხედში გვაქვს:

$$\angle BAM + \angle MBA = 180° - \angle AMB = 180° - \mu,$$

$$\angle BAM - \angle MBA = (\alpha + \chi) - (\beta + \chi) = \alpha - \beta.$$

მივიღეთ, რომ $\angle BAM$, $\angle MBA$ და $\angle PDC, \angle DCP$ აკმაყოფილებენ წრფივ განტოლებათა ერთი და იგივე სისტემას, ამიტომ გვაქვს

$$\angle BAM = \angle PDC = \frac{180° - \mu + \alpha - \beta}{2} \quad \text{და} \quad \angle MBA = \angle DCP = \frac{180° - \mu - \alpha + \beta}{2}.$$

ამრიგად, PDC და MAB სამკუთხედები მსგავსია შესაბამისი კუთხეების ტოლობის გამო, რაც ასრულებს დამტკიცებას.

ამოხსნის ეტაპები

ა) გაავლო p_a, $p_{b,}$ m_a, m_b მონაკვეთები და აღნიშნა, რომ $p_a : p_b = m_a : m_b$ ტოლობა ეკვივალენტურია T, M და P წერტილების ერთ წრფეზე მდებარეობის;

ბ) დაადგინა, რომ $\dfrac{p_a}{p_b} = \dfrac{PD}{PC}$ ან $\dfrac{m_a}{m_b} = \dfrac{MA}{MB}$;

გ) დაადგინა, რომ $p_a : p_b = m_a : m_b$ ტოლობა ეკვივალენტურია $PD : PC = MA : MB$ ტოლობის;

დ) დაადგინა, რომ $\angle PDC + \angle DCP = 180° - \mu$ ან $\angle BAM + \angle MBA = 180° - \mu$;

ე) დაადგინა, რომ $\angle PDC - \angle DCP = \alpha - \beta$ ან $\angle BAM - \angle MBA = \alpha - \beta$;

ვ) დაადგინა, რომ $\angle BAM = \angle PDC$ და $\angle MBA = \angle DCP$;

ზ) დაადგინა, რომ PDC და MAB სამკუთხედები მსგავსია და დაასრულა დამტკიცება.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ)
3 ქ- ა) , ბ), გ)
4 ქ- ა), ბ), გ), დ) ან ა), ბ), გ), ე)
5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

ამოცანა 6. ვთქვათ $R_{>0}$ ყველა ნამდვილ დადებით რიცხვთა სიმრავლეა. იპოვეთ ყველა ფუნქცია $f: R_{>0} \to R_{>0}$ ისეთი, რომ

$$x(f(x) + f(y)) \geq \big(f\big(f(x)\big) + y\big)f(y)$$

ყოველი $x, y \in R_{>0}$.

ამოხსნა. ვთქვათ f აკმაყოფილებს ამოცანის პირობაში მოცემულ უტოლობას. f -ის თავის თავთან k-ჯერ კომპოზიცია აღვნიშნოთ შემდეგნაირად $f^k(x) = f\big(f(\ldots f(x)\ldots)\big)$. ვიგულისხმოთ, რომ $f^0(x) = x$. ჩავსვათ ზემოთ მოცემულ უტოლობაში $y = x$, მაშინ მივიღებთ

$$x \geq f^2(x),$$

ხოლო თუ მოვახდენთ ჩასმას $x = f(y)$, მივიღებთ უტოლობას $f(y) + f^2(y) \geq y + f^3(y)$ რაც ეკვივალენტურია შემდეგი უტოლობის

$$f(y) - f^3(y) \geq y - f^2(y).$$

თუ ბოლოს მიღებულ უტოლობაში y-ის ნაცვლად ჩავსვავთ $f^{n-1}(y)$-ს მივიღებთ, რომ

$$f^n(y) - f^{n+2}(y) \geq f^{n-1}(y) - f^{n+1}(y)$$

ყოველი $y \in R_{>0}$ და $n \geq 1$. კერძოდ, $f^n(y) - f^{n+2}(y) \geq y - f^2(y) \geq 0$ ყოველი $n \geq 1$. ყოველი ლუწი $n = 2m$ რიცხვისთვის და ყოველი დადებითი y-თვის გვექნება

$y > y - f^{2m}(y) = f^0(y) - f^{2m}(y) = \sum_{i=0}^{m-1}(f^{2i}(y) - f^{2i+2}(y)) \geq m(y - f^2(y))$. ამრიგად მივიღეთ, რომ ყოველი $m \geq 1$ -თვის $y > m\big(y - f^2(y)\big) \geq 0$, ეს კი შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $y \in R_{>0}$, გვაქვს

$$f^2(y) = y.$$

ამის გათვალისწინებით, ამოცანის პირობაში მოცემული უტოლობა მიიღებს სახეს $xf(x) \geq yf(y)$ ყოველი $x, y \in R_{>0}$, რაც ნიშნავს იმას, რომ $xf(x)$ არის მუდმივი სიდიდე, ანუ მივიღეთ, რომ $f(x) = c/x$, სადაც c ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. ახლა შევამოწმოთ, რომ მიღებული ფუნქცია მართლაც აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ რადგან $f^2(x) = c/(c/x) = x$ ამიტომ საკმარისია შევამოწმოთ $xf(x) \geq yf(y)$ უტოლობის მართებულობა ყოველი დადებითი x, y რიცხვებისთვის, რაც მართლაც სრულდება, $c \geq c$. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

პასუხი: $f(x) = c/x$, სადაც c ნებისმიერი დადებითი რიცხვია.

ამოხსნის ეტაპები

ა) მოახდინა ჩასმები $y = x$ და $x = f(y)$ და მიიღო უტოლობები $x \geq f^2(x)$ და $f(y) + f^2(y) \geq y + f^3(y)$;

ბ) გადაწერა ა) პუნქტში მიღებული უტოლობა $f(y) - f^3(y) \geq y - f^2(y)$ სახით და მიიღო $f^n(y) - f^{n+2}(y) \geq f^{n-1}(y) - f^{n+1}(y)$;
გ) ყოველი ლუწი $n = 2m$- თვის და დადებითი y-თვის მიიღო შეფასება

$y - f^{2m}(y) \geq m(y - f^2(y))$;

დ) აჩვენა $y > m\big(y - f^2(y)\big) \geq 0$ უტოლობის მართებულობა ყოველი m- თვის და დაასკვნა, რომ $y - f^2(y) = 0$;

ე) პუნქტ დ)- ში მიღებულ უტოლობაზე დაყრდნობით მიიღო, რომ $xf(x) \geq yf(y)$-ზე ყოველი $x, y \in R_{>0}$ ის ;

ვ) დაასკვნა, რომ $xf(x)$ არის მუდმივი სიდიდე და მიიღო პასუხი;

ზ) აჩვენა, რომ მიღებული ფუნქცია $f(x) = c/x,\ c > 0$, მართლაც აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას;

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)

2 ქ- ა), ბ)

3 ქ- ა) , ბ), გ)

4 ქ- ა), ბ), გ), დ)

5 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)

6 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

7 ქ- ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)