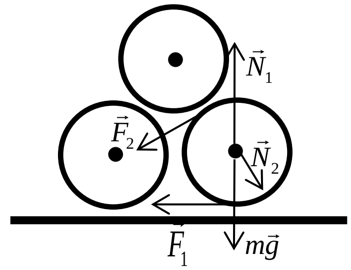
ამოცანა N1-ის ამოხსნა და შეფასების სქემა: ჩოგბურთის ბურთების კოშკი

A.1 დავწეროთ ძალთა ბალანსის განტოლება ორივე ღერძის მიმართ ქვედა ცილინდრისთვის:

$$mg - N_1 + N_2\cos 30^o + F_2\sin 30^o = 0$$
$$F_1 + F_2\cos 30^o - N_2\sin 30^o = 0$$

(0.5 ქულა)



ანალოგიურად ძალთა ბალანსი ზედა ცილინდრისთვის:

$$mg - 2N_2\cos 30^o - 2F_2\sin 30^o = 0$$ **(0.5 ქულა)**

ხოლო ძალების მომენტების ბალანსი ქვედა ცილინდრებისთვის ჩაიწერება მარტივად:

$$F_1 = F_2$$ **(0.5 ქულა)**

საბოლოოდ კი მივიღებთ გამოსახულებებს ოთხივე ძალისთვის შემდეგი ფორმით:

$$F_1 = F_2 = \frac{mg}{2\left(2+\sqrt{3}\right)};\qquad N_2 = \frac{mg}{2};\qquad N_1 = \frac{3mg}{2}$$ **(0.3 ქულა)**

რაც ავტომატურად იძლევა ხახუნის კოეფიციენტების ზღვრულ მნიშვნელობებს ცილინდრსა და სადგამს და აგრეთვე ცილინდრების მოხახუნე ზედაპირებს შორის:

$$\mu_1 = \frac{F_1}{N_1} = \frac{2-\sqrt{3}}{3};\qquad \mu_2 = \frac{F_2}{N_2} = 2-\sqrt{3}$$ **(0.7 ქულა)**

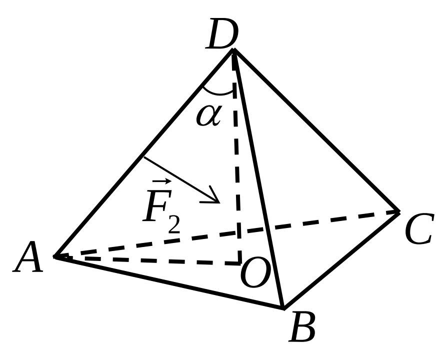
A2. თუ ყველა ზედაპირი ერთნაირი ხახუნის კოეფიციენტით ხასიათდება, მაშინ ზღვრული კოეფიციენტია

$$\mu = 2-\sqrt{3}$$ **(0.2 ქულა)**

A3. თუ ხახუნის კოეფიციენტი ამაზე მცირედით ნაკლებია, მაშინ ზემოთა ცილინდრი იწყებს სრიალს ქვედა ცილინდრებზე, ხოლო ქვედა ცილინდრები გაგორდებიან სადგამზე აქეთ-იქით. **(0.3 ქულა)**

A4. ბურთების ცენტრები ადგენენ ტოლგვერდა პირამიდას, რომელიც ნახაზზეა ნაჩვენები. ხახუნის ძალა $\vec{F}_2$ ზედა (ცენტრით D წერტილში) და ქვედა (ცენტრით A წერტილში) ბურთს შორის მოდებულია ADO სამკუთხედის სიბრტყეში, რომლის ზედა კუთხე D-სთან ტოლია

$$\sin\alpha = {}^{1}\!/\!\sqrt{3}$$ **(2.5 ქულა)**



წინა ამოცანის ანალოგიურად იწერება ძალთა ბალანსის განტოლება ქვედა ბურთისთვის (ცენტრით A წერტილში)

$$mg - N_1 + N_2\cos\alpha + F_2\sin\alpha = 0$$
$$F_1 + F_2\cos\alpha - N_2\sin\alpha = 0$$

(0.5 ქულა)

და ზედა (ცენტრით D წერტილში) ბურთისთვის

$$mg - 3N_2\cos\alpha - 3F_2\sin\alpha = 0$$ **(1 ქულა)**

აგრეთვე დავწეროთ ხახუნის ძალების მომენტების ტოლობა:

$$F_1 = F_2$$ **(0.5 ქულა)**

გვაქვს ოთხი განტოლება ოთხი უცნობით და საბოლოოდ მივიღებთ გამოსახულებებს ყველა ძალისთვის:

$$N_1 = \frac{4mg}{3};\qquad N_2 = \frac{mg}{3};\qquad F_1 = F_2 = mg\frac{\sin\alpha}{3\left(1+\cos\alpha\right)}$$ **(0.5 ქულა)**

რაც ავტომატურად იძლევა ხახუნის კოეფიციენტების ზღვრულ მნიშვნელობებს ბურთებსა და ზედაპირს შორის და აგრეთვე ცილინდრების მოხახუნე ზედაპირებს შორის:

$$\mu_1 = \frac{F_1}{N_1} = \frac{\sin\alpha}{4\left(1+\cos\alpha\right)}; \qquad \mu_2 = \frac{F_2}{N_2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$ **(0.5 ქულა)**

ახლა თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\sin\alpha = 1/\sqrt{3}$, მივიღებთ:

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}; \qquad \mu_2 = \sqrt{3}-\sqrt{2}.$$ **(0.5 ქულა)**

A5. თუ ყველა ზედაპირი ერთნაირი ხახუნის კოეფიციენტით ხასიათდება, მაშინ ზღვრული კოეფიციენტია

$$\mu = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$ **(0.5 ქულა)**

A6. თუ ხახუნის კოეფიციენტი ამაზე მცირედით ნაკლებია, მაშინ ზემოთა ბურთი იწყებს სრიალს ქვედა ბურთებზე, ხოლო ქვედა ბურთები გაგორდებიან ზედაპირზე აქეთ-იქით. **(0.5 ქულა)**

ამოცანა N2-ის ამოხსნა და შეფასების სქემა: იზინგის მოდელი

A1. დავწეროთ ალბათობები სპინის $S_{\downarrow}=-1$და $S_{\uparrow}=+1$ მდგომარეობებისთვის:

$$P_{\uparrow}=Ae^{H_0/T};\quad P_{\downarrow}=Ae^{-H_0/T};$$

ნორმირების პირობა:

$$P_{\uparrow}+P_{\downarrow}=A\left(e^{H_0/T}+e^{-H_0/T}\right)=1\quad\Rightarrow\quad A=1\Big/\left(e^{H_0/T}+e^{-H_0/T}\right)$$ **(0.5 ქულა)**

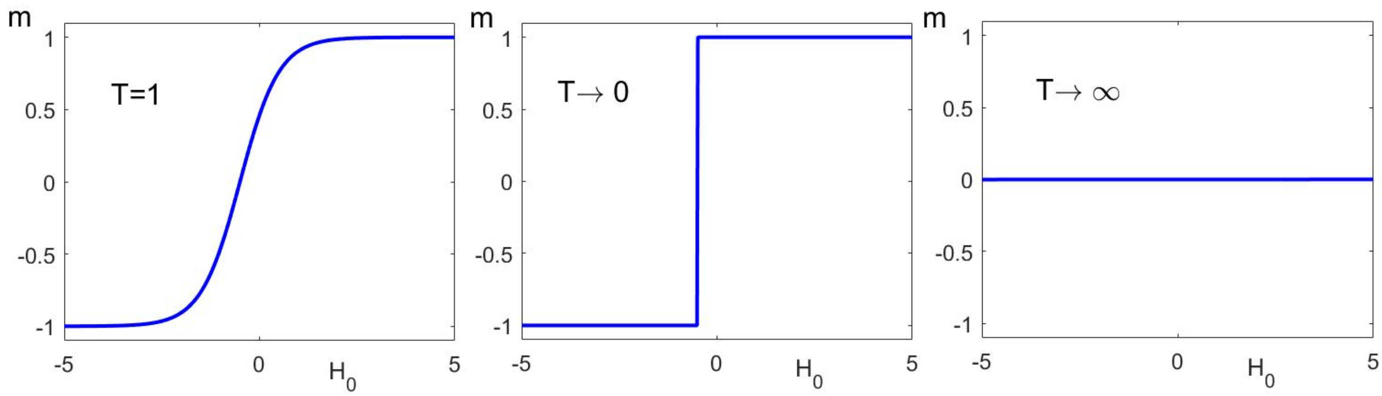
A2. ესე იგი გვაქვს:

$$P_{\uparrow}=e^{H_0/T}\Big/\left(e^{H_0/T}+e^{-H_0/T}\right);\quad P_{\downarrow}=e^{-H_0/T}\Big/\left(e^{H_0/T}+e^{-H_0/T}\right).$$

დამაგნიტებულობის საშუალო მნიშვნელობა:

$$m\equiv\langle S\rangle=S_{\uparrow}P_{\uparrow}+S_{\downarrow}P_{\downarrow}=\left(e^{H_0/T}-e^{-H_0/T}\right)\Big/\left(e^{H_0/T}+e^{-H_0/T}\right);\quad\Rightarrow\quad m=\tanh\left(H_0/T\right)$$ **(0.2 ქულა)**

(0.1 ქულა) **(0.1 ქულა)** **(0.1 ქულა)**



B1. მთლიანი მაგნიტური ველი:

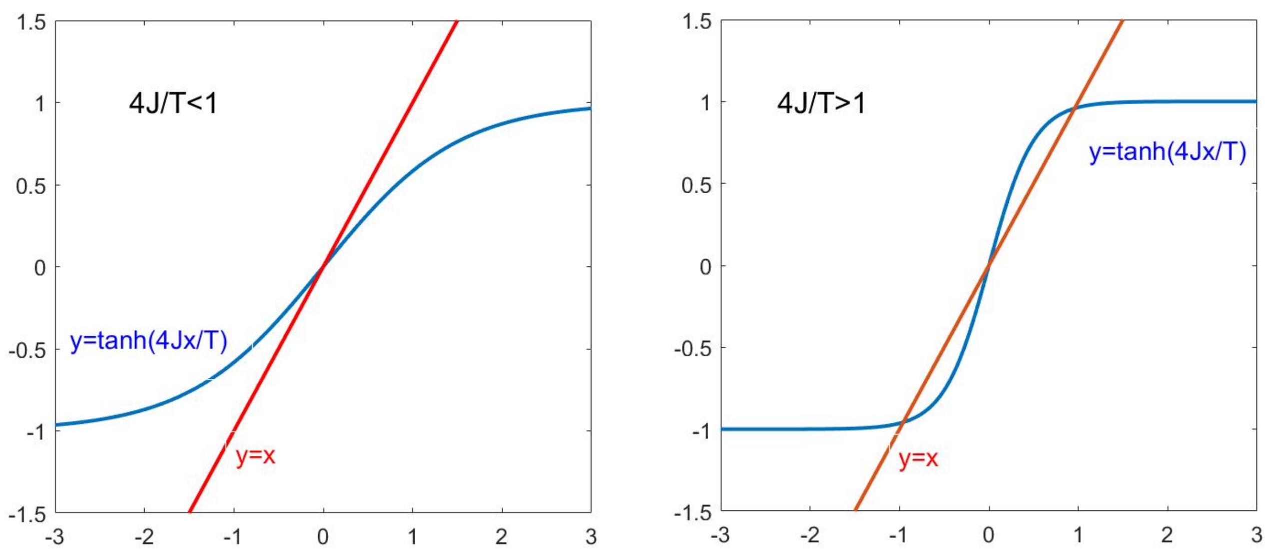
$$H=H_0+4Jm\quad\Rightarrow\quad\alpha=4J$$ **(0.5 ქულა)**

B2. და საბოლოოდ მივიღებთ კურიე-ვეისის განტოლებას დამაგნიტებისთვის:

$$m=\tanh\left[\left(H_0+4Jm\right)/T\right].$$ **(1.5 ქულა)**

B3. ნულოვანი გარე ველის დროს H_0 კურიე-ვეისის განტოლებას აქვს უფრო მარტივი სახე:

$$m=\tanh\left[4Jm/T\right]$$

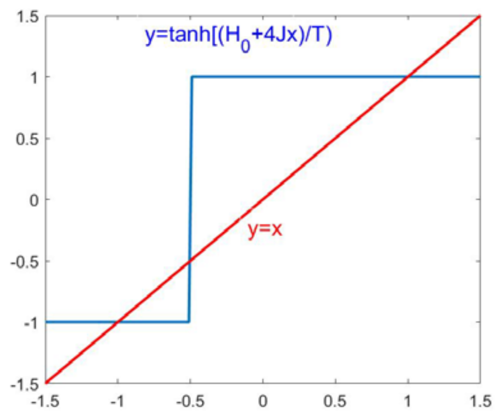


გრაფიკიდან ცხადია, იმისთვის რომ გვქონდეს სამი ამოხსნა, მარცხენა ფუნქციის დახრა (ესე იგი წარმოებული) $m=0$ წერტილში უფრო ნაკლები უნდა იყოს, ვიდრე მარჯვენა ფუნქციის დახრა იგივე წერტილში. რაც გვაძლევს:

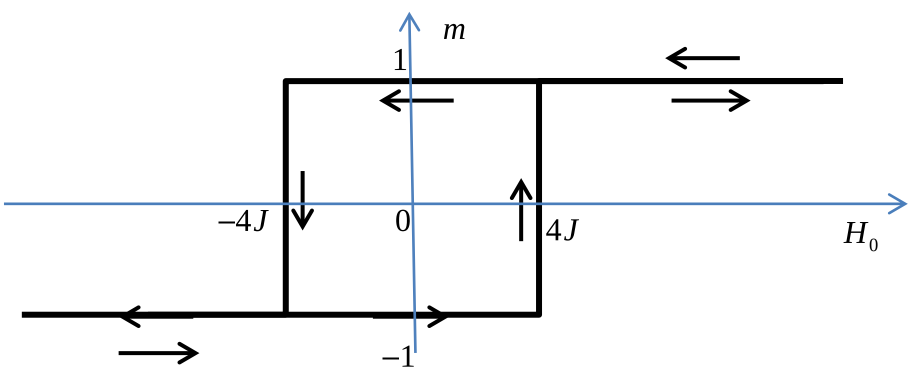
$$1<4J/T \quad \Rightarrow \quad T<T_C; \quad T_C=4J.$$ **(2 ქულა)**

სადაც $T_C=4J$ ფაზური გადასვლის კრიტიკული ტემპერატურაა.

C1. განვიხილოთ არანულოვანი გარე მაგნიტური ველი $H_0\neq 0$ და დაბალი ტემპერატურული რეჟიმი $T\to 0$. ამ შემთხვევაში $\tanh\left[\left(H_0+4Jm\right)/T\right]$ ფუნქციას აქვს ნახაზზე მოცემული ფორმა და განტოლებას $m=\tanh\left[\left(H_0+4Jm\right)/T\right]$ აქვს მხოლოდ ერთი ამონახსნი თუ $H_0>4J$ და ამ შემთხვევაში ამონახსნია $m=+1$. თუ კი $H_0<-4J$, მაშინ ისევ ერთი ამონახსნია: $m=-1$. ყველა სხვა შემთხვევაში გვაქვს სამი ამონახსნი $m=-1;\ m=m_0;\ m=+1$, სადაც $-1<m_0<1$. ამასთან, შუალედური $m=m_0$ მდგომარეობა ნულთან ახლო ტემპერატურული რეჟიმებისთვის ყოველთვის არამდგრადია. **(2 ქულა)**

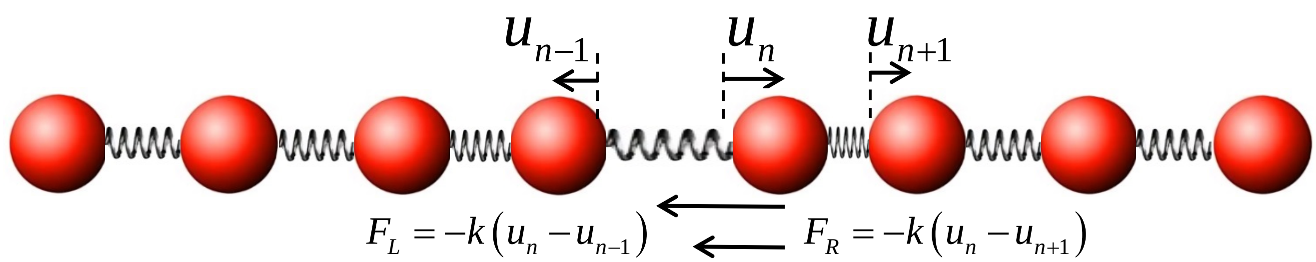


C2. ზემოთ მოყვანილი არგუმენტებიდან კი გამომდინარეობს, რომ ჰისტერეზისის მარყუჟს აქვს შემდეგი ფორმა $T\to 0$ ზღვარში. **(3 ქულა)**



ამოცანა N3-ის ამოხსნა და შეფასების სქემა: ფრენელის ფორმულები ოსცილატორების ჯაჭვში

A.1 ერთგვაროვან უსასრულო ოსცილატორულ ჯაჭვში დავწეროთ რა ძალები მოქმედებენ n-ურ ბურთულაზე მარჯვნიდან და მარცხნიდან, თუ თვითონ ამ n-ური ბურთულას გადახრა წონასწორული მდგომარეობიდან არის u_n ხოლო $n-1$ და $n+1$ ბურთულების გადახრებია შესაბამისად u_{n-1} და u_{n+1}. მაშინ მარჯვენა ზამბარა დაჭიმულია u_n-u_{n+1} სიგრძით და მასზე მარჯვნიდან მოქმედებს ძალა $F_R=-k\left(u_n-u_{n+1}\right)$, ხოლო მარცხნიდან მოქმედებს ძალა $F_L=-k\left(u_n-u_{n-1}\right)$. ამიტომ n-ურ ბურთულაზე მოქმედი ძალების ტოლქმედია $F=k\left(u_{n-1}+u_{n+1}-2u_n\right)$. მაშინ ნიუტონის მეორე კანონი n-ური ბურთულისთვის ჩაიწერება შემდეგნაირად:



$$m\frac{d^2u_n}{dt^2}=k\left(u_{n+1}-u_n\right)+k\left(u_{n-1}-u_n\right)$$ (1 ქულა)

A2. დისპერიული თანაფარდობის მისაღებად n-ური ბურთულის მოძრაობის განტოლებაში ჩავსვათ ტალღური გამოსახულება $u_n=A\cos(\omega t-pn)$. მივიღებთ:

$$-m\omega^2A\cos(\omega t-pn)=kA\left\{\cos\left(\omega t-p\left(n+1\right)\right)+\cos\left(\omega t-p\left(n-1\right)\right)-2\cos(\omega t-pn)\right\}$$ (0.5 ქულა)

გამარტივებით მივიღებთ:

$$-m\omega^2\cos(\omega t-pn)=k\left\{2\cos\left(\omega t-pn\right)\cos\left(p\right)-2\cos(\omega t-pn)\right\}$$ (0.5 ქულა)

და საბოლოოდ მიიღება დისპერსიული თანაფარდობა:

$$\omega^2=2\frac{k}{m}\left[1-\cos(p)\right]$$ (1 ქულა)

B1. რადგან ტალღა ეცემა მარცხნიდან, ამ მხარეს გვექნება დაცემული და ჯაჭვების საზღვრიდან არეკვლილი ტალღა, ხოლო მარჯვენა მხარეს კი მხოლოდ ჯაჭვების საზღვარში გასული ტალღა. დავნომროთ მარცხენა ჯაჭვი ისე, რომ საზღვრისპირა დიდ ბურთულას ჰქონდეს ნომერი 0, ხოლო საზღვრისპირა პატარა ბურთულას კი ნომერი 1. მარცხნიდან დაცემულ და საზღვრიდან არეკვლილი ტალღების სუპერპოზიცია იქნება $u_n=A\cos(\omega t-p_1n)+B\cos(\omega t+p_1n+\alpha)$, ხოლო მარჯვნივ გადასულ ტალღას ექნება ფორმა $u_n=D\cos(\omega t-p_2n+\beta)$. ეს ორი გამოსახულება უნდა გადაებას წერტილებში $n=0$ და $n=1$. შესაბამისად ვიღებთ ორ განტოლებას:

$$A\cos(\omega t)+B\cos(\omega t+\alpha)=D\cos(\omega t+\beta)$$
$$A\cos(\omega t-p_1)+B\cos(\omega t+p_1+\alpha)=D\cos(\omega t-p_2+\beta)$$ (2 ქულა)

B2. ეს ტოლობები გადაიწერება, როგორც:

$$A\cos(\omega t)+B\cos(\omega t)\cos\alpha-B\sin(\omega t)\sin\alpha=D\cos(\omega t)\cos(\beta)-D\sin(\omega t)\sin(\beta)$$
$$A\cos(\omega t)\cos p_1+A\sin(\omega t)\sin p_1+B\cos(\omega t)\cos(p_1+\alpha)-B\sin(\omega t)\sin(p_1+\alpha)=$$
$$=D\cos(\omega t)\cos(\beta-p_2)-D\sin(\omega t)\sin(\beta-p_2)$$ (2 ქულა)

დავაჯგუფოთ $\sin(\omega t)$ და $\cos(\omega t)$ პროპორციული წევრები და გავითვალისწინოთ, რომ თუ $J_1 \sin(\omega t) + J_2 \cos(\omega t) = 0$ უნდა დაკმაყოფილდეს ნებისმიერი დროის მომენტისთვის, ამისთვის აუცილებელია პირობების $J_1 = J_2 = 0$ დაკმაყოფილება. ამგვარად მივიღებთ ოთხ განტოლებას ოთხი უცნობით:

$$
\begin{aligned}
&A + B\cos\alpha = D\cos(\beta) \\
&B\sin\alpha = D\sin(\beta) \\
&A\cos p_1 + B\cos(p_1 + \alpha) = D\cos(\beta - p_2) \\
&A\sin p_1 - B\sin(p_1 + \alpha) = -D\sin(\beta - p_2)
\end{aligned}
$$

(2 ქულა)

ავიყვანოთ ყველა განტოლება კვადრატში, აკვადრატებული განტოლებებიდან პირველს დავუმატოთ მეორე, ხოლო მესამეს მეოთხე, გვექნება:

$$A^2 + B^2 + 2AB\cos\alpha = D^2$$

$$A^2 + B^2 + 2AB\cos(2p_1 + \alpha) = D^2$$

ამ ორი განტოლებიდან კი ცხადად ჩანს, რომ

$$\alpha = -p_1$$

შევიტანოთ α -ს ეს მნიშვნელობა წინა ოთხ განტოლებაში და გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$
\begin{aligned}
&B\cos p_1 = D\cos\beta - A \\
&-B\sin p_1 = D\sin\beta \\
&A\cos p_1 = D\cos(\beta - p_2) - B \\
&A\sin p_1 = -D\sin(\beta - p_2)
\end{aligned}
$$

იგივენაირად აკვადრატებით და იგივე პროცედურით გვექნება ახლა სხვა ორი განტოლება

$$B^2 = D^2 + A^2 - 2DA\cos\beta$$

$$A^2 = D^2 + B^2 - 2DB\cos(\beta - p_2)$$

თუ ამათ დავუმატებთ, მივიღებთ:

$$D = A\cos\beta + B\cos(\beta - p_2)$$

ახლა აქ თუ შევიტანთ მეორე და მეოთხე ტოლობებიდან $B = -D\sin\beta / \sin p_1$ და $A = -D\sin(\beta - p_2)/\sin p_1$, მივიღებთ:

$$-\sin p_1 = \sin(\beta - p_2)\cos\beta + \sin\beta\cos(\beta - p_2) \quad \Rightarrow \quad -\sin p_1 = \sin(2\beta - p_2)$$

საიდანაც მივიღებთ უკვე მეორე ფაზის მნიშვნელობას

$$\beta = \frac{p_2 - p_1}{2}$$

საიდანაც უკვე ცხადია, რომ მეორე და მეოთხე განტოლებების შეფარდებით და აგრეთვე მეოთხე განტოლებიდან გვაქვს:

$$\frac{B}{A} = \sin\left(\frac{p_1 - p_2}{2}\right) \Big/ \sin\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right); \qquad \frac{D}{A} = -\sin p_1 / \sin(\beta - p_2) = \sin p_1 \Big/ \sin\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right)$$

(1 ქულა)

B2. პუნქტის ამოხსნის მეორე ვარიანტი

B2. კომპლექსური არითმეტიკის გამოყენებით ამოხსნა: საზღვრის მარცხნივ ტალღა მოიცემა გამოსახულებით

$$u_n = Ae^{i(\omega t - p_1 n)} + Be^{i(\omega t + p_1 n)}$$

ხოლო საზღვრის მარჯვნივ გვაქვს:

$$u_n = De^{i(\omega t - p_2 n)}$$

სადაც A, B და D ახლა კომპლექსური რიცხვებია. ამ ორი გამოსახულების გადაბმა $n = 0$ და $n = 1$ ბურთულებისთვის გვაძლევს ორ განტოლებას:

$$Ae^{i\omega t}+Be^{i\omega t}=De^{i\omega t}$$

$$Ae^{i(\omega t-p_1)}+Be^{(i\omega t+p_1)}=De^{(i\omega t-p_2)}$$

(2 ქულა)

შევკვეცოთ $e^{i\omega t}$-ზე ყველაფერი, გავამრავლოთ პირველი განტოლება e^{-ip_2}-ზე და გამოვაკლოთ ერთმანეთს, მივიღებთ:

$$B=-A\frac{e^{-ip_2}-e^{-ip_1}}{e^{-ip_2}-e^{ip_1}}=-A\frac{e^{-i(p_2+p_1)/2}\left(e^{-i(p_2-p_1)/2}-e^{i(p_2-p_1)/2}\right)}{e^{-i(p_2-p_1)/2}\left(e^{-i(p_2+p_1)/2}-e^{i(p_2+p_1)/2}\right)}=Ae^{-ip_1}\frac{\sin\left[(p_1-p_2)/2\right]}{\sin\left[(p_1+p_2)/2\right]}$$

(3 ქულა)

$$D=A+B=A\left(1-\frac{e^{-ip_2}-e^{-ip_1}}{e^{-ip_2}-e^{ip_1}}\right)=A\frac{e^{-ip_1}-e^{ip_1}}{e^{-ip_2}-e^{ip_1}}=Ae^{i(p_2-p_1)/2}\frac{\sin\left[p_1/2\right]}{\sin\left[(p_1+p_2)/2\right]}$$

ეს კი აბსოლუტურად იგივეა, რაც გვქონდა წინა მეთოდით მიღებული.