ორშაბათი, 27 ივლისი

I ტური

1. ვთქვათ $u_1, u_2, \ldots, u_{2020}$ ნამდვილი რიცხვები ისეთია, რომ $u_1 + u_2 + \ldots + u_{2020} = 0$ და $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{2020}^2 = 1$. ვთქვათ a არის $u_1, u_2, \ldots, u_{2020}$ რიცხვებს შორის უმცირესი, ხოლო b არის $u_1, u_2, \ldots, u_{2020}$ რიცხვებს შორის უდიდესი. დაამტკიცეთ, რომ $ab \le -\frac{1}{2020}$.

ამოხსნა

შევნიშნოთ, რომ $a < 0$ და $b > 0$. მართლაც, რადგან $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{2020}^2 = 1$, ამიტომ $u_1, u_2, \ldots, u_{2020}$ რიცხვებიდან ყველა ვერ იქნება ნულის ტოლი. მაშინ $u_1 + u_2 + \ldots + u_{2020} = 0$ ტოლობის გამო შეუძლებელია ყველა $u_1, u_2, \ldots, u_{2020}$ იყოს არაუარყოფითი ან არადადებითი. ვთქვათ $P = \{i : u_i > 0\}$ და $N = \{i : u_i \le 0\}$. ვთქვათ p არის P სიმრავლეში შემავალი ინდექსების რაოდენობა, ხოლო n არის N სიმრავლეში შემავალი ინდექსების რაოდენობა, მაშინ $p + n = 2020$. გვაქვს $0 = \sum_{i=1}^{2020} u_i = \sum_{i\in P} u_i - \sum_{i\in N} |u_i| \Leftrightarrow \sum_{i\in P} u_i = \sum_{i\in N} |u_i|$. მაშინ

$$\sum_{i\in P} u_i^2 \le \sum_{i\in P} b u_i = b\sum_{i\in P} u_i = b\sum_{i\in N} |u_i| \le b\sum_{i\in N} |a| = -nab$$

და

$$\sum_{i\in N} u_i^2 \le \sum_{i\in N} |u_i|\cdot|a| = |a|\sum_{i\in N} |u_i| = |a|\sum_{i\in P} u_i \le |a|\sum_{i\in P} b = -pab.$$

ამრიგად

$$1 = \sum_{i=1}^{2020} u_i^2 = \sum_{i\in P} u_i^2 + \sum_{i\in N} u_i^2 \le -pab - nab = -2020ab \Rightarrow ab \le -\frac{1}{2020}.$$

ამოხსნის ეტაპები

ა) შენიშნა, რომ $a < 0$ და $b > 0$;

ბ) განიხილა სიმრავლეები $P = \{i : u_i > 0\}$ და $N = \{i : u_i \le 0\}$;

გ) დაადგინა, რომ $p + n = 2020$;

დ) დაადგინა, რომ $\sum_{i\in P} u_i = \sum_{i\in N} |u_i|$;

ე) დაადგინა, რომ $\sum_{i\in P} u_i^2 \le -nab$;

ვ) დაადგინა, რომ $\sum_{i\in N} u_i^2 \le -pab$;

ზ) მიიღო $ab \le -\frac{1}{2020}$.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ)
3ქ- ა) , ბ), გ)
4ქ- ა), ბ), გ), დ)
5ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

2. ვიტყვით, რომ მთელ რიცხვთა რაღაც S სიმრავლე არის *კარგი*, თუ ყოველი მთელი დადებითი n რიცხვისთვის და ყოველი $a_0, a_1, \dots, a_n$ -თვის, სადაც $a_i \in S,\ 0 \le i \le n$,

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

n-ური ხარისხის მრავალწევრის ყველა მთელი ფესვი ისევ S სიმრავლის ელემენტია.

იპოვეთ ყველა კარგი სიმრავლე, რომელიც შეიცავს ყველა $2^a - 2^b$ სახის რიცხვს,

სადაც a და b ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვებია.

ამოხსნა

ვაჩვენოთ, რომ ამოცანის პასუხია ყველა მთელ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbb{Z}$. ცხადია, რომ $\mathbb{Z}$ კარგი სიმრავლეა. ამრიგად საჩვენებელი გვაქვს, რომ ერთადერთი კარგი სიმრავლე რომელიც ყველა $2^a - 2^b$, $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$, სახის რიცხვს, შეიცავს ემთხვევა $\mathbb{Z}$ -ს.

შევნიშნოთ, რომ $0 = 2^1 - 2^1 \in S$ და $2 = 2^2 - 2^1 \in S$. ასევე $-1 \in S$, ვინაიდან იგი არის $2x + 2$ მრავალწევრის ფესვი. აქედან ვღებულობთ, რომ $1 \in S$, რადგანაც იგი წარმოადგენს $2x^2 - x - 1 = 0$ განტოლების ფესვს. ცხადია, რომ თუ $n \in S$ მაშინ, $-n \in S$, როგორც $x + n$ პოლინომის ფესვი. ამრიგად საჩვენებელი დაგვრჩა, რომ ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვი ეკუთვნის S.

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ S სიმრავლე შეიცავს ნებისმიერი მთელი n რიცხვის ჯერად რიცხვს. ვთქვათ $n = 2^c t$, სადაც $c \in \mathbb{Z}_{>0}$ და t კენტია. მაშინ ეილერის თეორემის თანახმად $t | 2^{\varphi(t)} - 1$. (მთელი დადებითი t რიცხვისთვის $\varphi(t)$ არის $1, \dots, t$ რიცხვებს შორის t-სთან თანამარტივ რიცხვთა რაოდენობა.) ამრიგად $n | 2^{c+\varphi(t)+1} - 2^{c+1} \in S$.

ახლა ინდუქციის გამოყენებით დავამტკიცოთ, რომ ყველა მთელი დადებითი რიცხვი n ეკუთვნის S-ს. ვთქვათ $0, \ldots, n-1 \in S$ და ვაჩვენოთ, რომ n -იც ეკუთვნის S-ს. როგორც უკვე ვაჩვენეთ არსებობს n -ის ჯერადი რიცხვი N, რომელიც ეკუთვნის S-ს. გავშალოთ N რიცხვი n -ობით სისტემაში, ვთქვათ $N = a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0$. ვინაიდან $0 \leq a_i < n$ ყოველი a_i-თვის, ამიტომ ყველა მათგანი ეკუთვნის S-ს. ამასთან, რადგანაც $n|N$ ამიტომ $a_0 = 0$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $a_k n^k + \cdots + a_1 n - N = 0$ და ე.ი. n არის იმ მრავალწევრის ფესვი, რომლის ყველა კოეფიციენტი S სიმრავლეშია. აქედან ვღებულობთ, რომ $n \in S$. რ.დ.გ.

პასუხი: $\mathbb{Z}$, ყველა მთელ რიცხვთა სიმრავლე.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ 0, 1 და -1 ეკუთვნის S სიმრავლეს;

ბ) დაადგინა, რომ თუ მთელი რიცხვი $n \in S$ მაშინ, $-n \in S$;

გ) აჩვენა, რომ S შეიცავს ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვის ჯერად რიცხვს;

დ) განიხილა მთელი დადებითი n რიცხვის ჯერადი რიცხვი $N \in S$ და გაშალა იგი n −ობით სისტემაში, $N = a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0$;

ე) შენიშნა, რომ $0 \leq a_i < n$ ყოველი a_i-თვის;

ვ) დაუშვა, რომ $0, \ldots, n-1 \in S$ და ე) პუნქტის გათვალისწინებით დაასკვნა, რომ ყველა a_i ეკუთვნის S-ს;

ზ) შენიშნა, რომ $a_0 = 0$ და მიიღო, რომ n არის $a_k x^k + \cdots + a_1 x - N$ მრავალწევრის ფესვი.

შეფასების სქემა

1ქ.-ა)

2ქ.-ა), ბ)

3ქ.-ა), ბ), გ)

4ქ.-ა), ბ), გ), დ)

5ქ.-ა), ბ), გ), დ), ე)

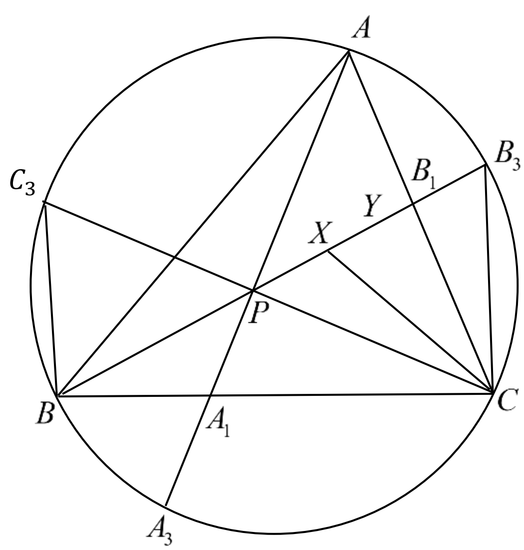
6ქ.-ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

7ქ.-ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

3. ABC სამკუთხედის შიგნით აღებულია P წერტილი. ვთქვათ AP წრფე BC გვერდს კვეთს A_1 წერტილში, BP წრფე CA გვერდს კვეთს B_1 წერტილში, ხოლო CP წრფე AB გვერდს კვეთს C_1 წერტილში. A_2 წერტილი ისეთია, რომ A_1 არის PA_2 მონაკვეთის შუაწერტილი. ანალოგიურად, B_2 წერტილი ისეთია, რომ B_1 არის PB_2 მონაკვეთის შუაწერტილი და C_2 წერტილი ისეთია, რომ C_1 არის PC_2 მონაკვეთის შუაწერტილი. დაამტკიცეთ, რომ შეუძლებელია A_2, B_2 და C_2 წერტილებიდან სამივე მდებარეობდეს ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის მკაცრად შიგნით.

ამოხსნა

ვთქვათ AP, BP და CP სხივები ABC სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირს მეორედ კვეთს შესაბამისად A_3, B_3 და C_3 წერტილებში. დავუშვათ საწინააღმდეგო, სამივე A_2, B_2 და C_2 წერტილები მდებარეობს ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის მკაცრად შიგნით. მაშინ უნდა შესრულდეს: $PA_1 < A_1A_3$, $PB_1 < B_1B_3$ და $PC_1 < C_1C_3$.



შევნიშნოთ, რომ $\Delta PBC_3 \sim \Delta PCB_3$. PB_3 მონაკვეთზე ავიღოთ X წერტილი ისე, რომ შესრულდეს $PX : XB_3 = PC_1 : C_1C_3$. ცხადია, რომ X წერტილი იქნება C_1 წერტილის შესაბამისი წერტილი აღნიშნული მსგავსების დროს. ამიტომ სამართლიანი იქნება:

$$\angle XCP = \angle PBC_1 = \angle B_3BA = \angle B_3CA = \angle B_3CB_1.$$

ვთქვათ, Y არის PCB_3 კუთხის ბისექტრისის ფუძე ΔPCB_3-ში. ვინაიდან $PC_1 < C_1C_3$, ამიტომ $PX < XB_3$. ასევე, ვინაიდან $PB_1 < B_1B_3$ და Y არის X-სა და B_1-ს შორის, ამიტომ $PY < YB_3$. ვინაიდან ბისექტრისის თვისებით $PY : YB_3 = PC : CB_3$, ამიტომ $PC < CB_3$ და აქედან გამომდინარე $\angle PB_3C < \angle CPB_3$. ამრიგად $\angle BAC = \angle BB_3C = \angle PB_3C < \angle CPB_3$.

ანალოგიურად მივიღებთ: $\angle CBA < \angle APC_3$ და $\angle ACB < \angle BPA_3 = \angle B_3PA$.

მივიღეთ: $\angle BAC+\angle CBA+\angle ACB<\angle CPB_3+\angle APC_3+\angle B_3PA \Leftrightarrow 180^\circ<180^\circ$, რაც არასწორია. ამრიგად ჩვენი დაშვება არ ყოფილა სამართლიანი, ე. ი. შეუძლებელია A_2, B_2 და C_2 წერტილებიდან სამივე მდებარეობდეს ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის მკაცრად შიგნით.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ $\Delta PBC_3 \sim \Delta PCB_3$;

ბ) განიხილა X წერტილი PB_3 მონაკვეთზე ისეთი, რომ $PX:XB_3=PC_1:C_1C_3$;

გ) დაადგინა, რომ $\angle XCP=\angle B_3CB_1$;

დ) დაადგინა, რომ $PY<YB_3$;

ე) დაადგინა, რომ $PC<CB_3$;

ვ) დაადგინა, რომ $\angle BAC<\angle CPB_3$

ზ) მიიღო წინააღმდეგობა და დაასრულა დამტკიცება.

შეფასების სქემა

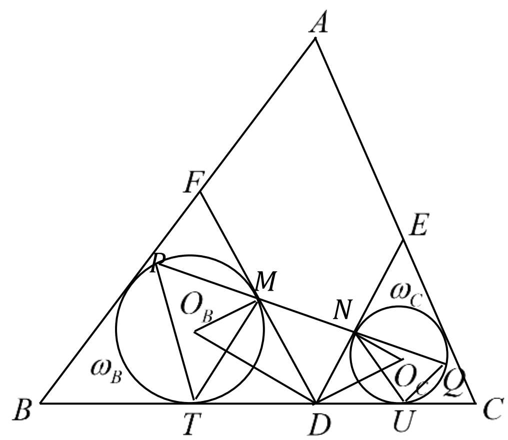
1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ)
3ქ- ა) , ბ), გ)
4ქ- ა), ბ), გ), დ)
5ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

სამშაბათი, 28 ივლისი

II ტური

4. ABC მახვილკუთხა სამკუთხედში გავლებულია AD, BE და CF სიმაღლეები. (D, E და F წერტილები მდებარეობენ შესაბამისად BC, AC და AB გვერდებზე). ვთქვათ ω_B არის BDF სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირი, რომელიც ეხება DF მონაკვეთს M წერტილში, ხოლო ω_C არის CDE სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირი, რომელიც ეხება DE მონაკვეთს N წერტილში. ვთქვათ MN წრფე ω_B და ω_C წრეწირებს მეორედ კვეთს შესაბამისად P და Q წერტილებში ($P \neq M$ და $Q \neq N$). დაამტკიცეთ, რომ $MP = NQ$.

ამოხსნა



ვთქვათ ω_B და ω_C წრეწირების ცენტრებია შესაბამისად O_B და O_C , ხოლო რადიუსებია R_B და R_C. შევნიშნოთ, რომ $AFDC$ და $ABDE$ ოთხკუთხედები ციკლურია, საიდანაც გვაქვს

$$\angle MDO_B = \frac{1}{2}\angle FDB = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle CDE = \angle NDO_C.$$

მაშასადამე $\Delta DMO_B \sim \Delta DNO_C$. ამიტომ $\dfrac{DN}{DM} = \dfrac{NO_C}{MO_B} = \dfrac{R_C}{R_B}$.

ვთქვათ $\angle DMN = \alpha$ და $\angle DNM = \beta$. მაშინ $\angle MTP = \angle FMP = \alpha$ და $\angle QUN = \angle QNE = \beta$. მაშინ $MP = 2R_B \sin\alpha$ და $NQ = 2R_C \sin\beta$. DNM სამკუთხედიდან სინუსების თეორემით გვექნება $\dfrac{DN}{DM} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. ამიტომ $\dfrac{MP}{NQ} = \dfrac{2R_B \sin\alpha}{2R_C \sin\beta} = \dfrac{R_B \sin\alpha}{R_C \sin\beta} = \dfrac{DM}{DN}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 1$.

ამრიგად $MP = NQ$, რ. დ. გ.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაადგინა, რომ $AFDC$ და $ABDE$ ოთხკუთხედები ციკლურია;

ბ) დაადგინა, რომ $\angle MDO_B = \angle NDO_C$;

გ) დაადგინა, რომ $\Delta DMO_B \sim \Delta DNO_C$;

დ) დაადგინა, რომ $\dfrac{DN}{DM}=\dfrac{R_C}{R_B}$;

ე) დაადგინა, რომ $\dfrac{DN}{DM}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$;

ვ) დაადგინა, რომ $MP=2R_B\sin\alpha$ და $NQ=2R_C\sin\beta$;

ზ) მიიღო $MP=NQ$.

შეფასების სქემა

1 ქ- ა)
2 ქ- ა), ბ)
3ქ- ა) , ბ), გ)
4ქ- ა), ბ), გ), დ)
5ქ- ა), ბ), გ), დ), ე)
6 ქ– ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)
7 ქ–ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

5. n ცალი ქვის ჯამური მასა $2n$ კგ-ია, ამასთან, თითოეული ქვის მასა არანაკლებ 1 კგ-ია. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ნამდვილი r რიცხვისთვის, სადაც $0\le r\le 2n-2$, ამ n ცალი ქვიდან შეგვიძლია ამოვარჩიოთ რამდენიმე ქვა ისე, რომ ამორჩეული ქვების ჯამური მასა იყოს არანაკლებ r კგ და არაუმეტეს $r+2$ კგ.

ამოხსნა

ვთქვათ $x_1,x_2,\dots,x_n$ ქვების მასებია. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $x_1\le x_2\le \dots \le x_n$. განვიხილოთ ჯამთა სიმრავლე $S=\{\sum_{j\in J}x_j: J\subseteq\{1,2,\dots,n\}\}$. დავალაგოთ S სიმრავლის ელემენტები არაკლებადობით. ამოცანის ამოსახსნელად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ასეთნაირად დალაგებულ S სიმრავლის ყოველ ორ მეზობელ ელემენტს შორის მანძილი არ აღემატება 2-ს.

ამისათვის მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით დავამტკიცოთ წინადადება: ყოველი k-თვის, სადაც $0\le k\le n$, $S_k=\{\sum_{j\in J}x_j: J\subseteq\{1,2,\dots,k\}\}$ სიმრავლის, არაკლებადობით დალაგებისას მის ყოველ ორ მეზობელ ელემენტს შორის მანძილი იქნება არაუმეტეს 2.

ცხადია, როცა $k=0$ წინადადება ჭეშმარიტია (ამ შემთხვევაში $S_0=\{0\}$). როცა $k>0$ გვაქვს

$$S_k=S_{k-1}\cup(x_k+S_{k-1}),$$

სადაც $x_k + S_{k-1}$-ით აღნიშნულია სიმრავლე $\{x_k + s: s \in S_{k-1}\}$. ამრიგად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $x_k \leq \sum_{j<k} x_j + 2$. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ანუ ვთქვათ $x_k > \sum_{j<k} x_j + 2$. მაშინ $x_l > \sum_{j<k} x_j + 2 \geq k + 1$, ყოველი $l \geq k$-თვის და ამრიგად გვექნება

$$2n = \sum_{j=1}^{n} x_j > (n + 1 - k)(k + 1) + k - 1.$$

ბოლო უტოლობიდან ვღებულობთ, რომ $n > k(n + 1 - k)$, რაც ადვილი საჩვენებელია, რომ მცდარია ყოველი $1 \leq k \leq n$. მიღებული წინააღმდეგობა ამთავრებს ამოცანის ამოხსნას.

ამოხსნის ეტაპები

ა) შენიშნა, რომ ამოცანის ამოსახსნელად საკმარისია ბუნებრივად დალაგებული S სიმრავლის ყოველ ორ მეზობელ ელემენტს შორის მანძილი არ აღემატებოდეს 2-ს;

ბ) ინდუქციის გამოსაყენებლად ჩამოაყალიბა წინადადება S_k სიმრავლისთვის;

გ) შენიშნა, რომ ადგილი აქვს შემდეგ სიმრავლურ ტოლობას $S_k = S_{k-1} \cup (x_k + S_{k-1})$;

დ) შენიშნა, რომ ამოცანის ამოსახსნელად საკმარისია $x_k \leq \sum_{j<k} x_j + 2$ უტოლობის დამტკიცება;

ე) დაუშვა საწინააღმდეგო და მიიღო შეფასება $x_l > k + 1$, ყოველი $l \geq k$;

ვ) მიიღო უტოლობა $n > k(n + 1 - k)$;

ზ) შენიშნა, რომ წინა პუნქტში მიღებული უტოლობა მცდარია ყოველი $1 \leq k \leq n$ და დაასრულა ამოცანის ამოხსნა.

შეფასების სქემა

1ქ.-ა)

2ქ.-ა), ბ)

3ქ.-ა), ბ), გ)

4ქ.-ა), ბ), გ), დ)

5ქ.-ა), ბ), გ), დ), ე)

6ქ.-ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

7ქ.-ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)

6. ვთქვათ $\mathbb{Z}_{>0}$ არის ყველა დადებით მთელ რიცხვთა სიმრავლე. მოცემულია მთელი დადებითი რიცხვი C. იპოვეთ ყველა ფუნქცია $f: \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ ისეთი, რომ ყოველი მთელი დადებითი a და b რიცხვებისთვის, სადაც $a+b>C$-ზე, $a^2+bf(a)$ უნაშთოდ იყოფა $a+f(b)$- ზე.

ამოხსნა

ვთქვათ $a=1$ და $b>C-1$-ზე, მაშინ რადგანაც $1+f(b) \mid 1^2+bf(1)$ ვღებულობთ, რომ $1+f(b) \leq 1^2+bf(1)$ და ე.ი. საკმაოდ დიდი მთელი დადებითი b -თვის $f(b) \leq bf(1)$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ყოველი მთელი დადებითი b-თვის, $b \mid f^2(b)$. ამისათვის განვიხილოთ იმდენად დიდი n რომ $nb-f(b) \geq C$. ვთქვათ $a=nb-f(b)$ მაშინ გვაქვს

$$nb \mid \left(nb-f(b)\right)^2+bf(nb-f(b))$$

საიდანაც ვღებულობთ, რომ $b \mid f^2(b)$. კერძოდ, აქედან გამომდინარეობს, რომ ყოველი მარტივი p-თვის $p \mid f(p)$, ანუ $f(p)=k(p)\cdot p$, სადაც $k(p)$ მთელი დადებითი რიცხვია. ზემოთ მიღებული $f(p) \leq pf(1)$ უტოლობის გამო (რომელიც მართებულია საკმარისად დიდი p-ებისთვის), არსებობს ისეთი მთელი დადებითი k, რომ $k(p)=k$ უსასრულოდ ზევრი p -თვის. ვაჩვენოთ ახლა, რომ ყოველი მთელი დადებითი a -თვის $f(a)=ka$. ამისათვის b -ს როლში ავიღოთ საკმარისად დიდი მარტივი p, რომლისთვისაც $k(p)=k$. ამოცანის პირობის თანახმად, გვაქვს

$$a+kp \mid \left(a^2+pf(a)\right)-a(a+kp)=p(f(a)-ka).$$

ცხადია, როცა $p>a$ -ზე, გვაქვს $\gcd(a+kp,p)=1$ და ე.ი. ვღებულობთ, რომ

$$a+kp \mid f(a)-ka$$

რაგინდ დიდი მარტივი p-სთვის. ეს კი შესაძლებელია, მხოლოდ მაშინ, როცა $f(a)-ka=0$. . ამრიგად მივიღეთ, რომ $f(a)=ka$, ყოველი მთელი დადებით a-თვის და რაღაც მთელი დადებითი (C რიცხვისგან დამოუკიდებელი) k-თვის. ის, რომ ასეთი ფუნქციისთვის

$$a+f(b) \mid a^2+bf(a)$$

ცხადია. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

პასუხი: $f(a)=ka$, სადაც $k \in \mathbb{Z}_{>0}$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) მიიღო უტოლობა, $f(b) \leq bf(1)$ საკმარისად დიდი მთელი დადებითი b-თვის;

ბ) აჩვენა, რომ ყოველი მთელი დადებითი b-თვის, $b \mid f^2(b)$;

გ) დაასკვნა, რომ ყოველი მარტივი p-თვის $p \mid f(p)$, ანუ $f(p)=k(p)\cdot p$;

დ) აჩვენა, რომ უსასრულოდ ბევრი მარტივი p რიცხვისთვის $k(p)$ ერთიდაიგივეა;

ე) ნებისმიერი მთელი დადებითი a -თვის აჩვენა, რომ $a + kp \mid p(f(a) - ka)$;

ვ) დაადგინა, რომ საკმარისად დიდი p-თვის $a + kp \mid f(a) - ka$;

ზ) წინა პუნქტში მიღებული პირობიდან გააკეთა საჭირო დასკვნა და დაასრულა ამოცანის ამოხსნა.

შეფასების სქემა

1ქ.-ა)

2ქ.-ა), ბ)

3ქ.-ა), ბ), გ)

4ქ.-ა), ბ), გ), დ)

5ქ.-ა), ბ), გ), დ), ე)

6ქ.-ა), ბ), გ), დ), ე), ვ)

7ქ.-ა), ბ), გ), დ), ე), ვ), ზ)